

Devoir à la maison n°10

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole (*) voire (**). La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.**

Exercice 1

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r , A et B deux points distincts de $\mathcal{C}$. Le but de cet exercice est de montrer le théorème de l'angle au centre :

M , un point du plan distinct de A et B est sur le cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}$

On se place dans un repère orthonormé de centre O et on note a , b et m , les affixes respectives de A , B et M . On note également $\alpha = \arg a$, $\beta = \arg b$ et $t = \arg m$ et $z = \frac{m-b}{m-a}$.

1. Si $M \in \mathcal{C}$, donner les formes trigonométriques de a , b et m . En déduire que

$$z = e^{i(\beta-\alpha)/2} \frac{\sin \frac{\beta-t}{2}}{\sin \frac{\alpha-t}{2}}$$

2. Montrer le sens direct du théorème de l'angle au centre.
3. Réciproquement, on suppose que $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}$.
Ecrire z sous la forme $\rho e^{i\theta}$ avec $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$. En déduire une expression de t puis que $M \in \mathcal{C}$.
4. Décrire géométriquement l'ensemble $\{M(m) \mid 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \leq (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}\}$
5. Pourquoi le résultat peut se démontrer de manière équivalente, dans un autre repère orthonormé (centré ailleurs) ?

Exercice 2

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère les points $A(5, 0)$, $B(-3, 4)$, $C(4, -3)$, $D(0, -5)$.
 - (a) Vérifier que A, B, C, D sont sur un même cercle Γ de centre O dont on précisera le rayon.
On note A', B', C' les projetés orthogonaux de D respectivement sur les droites (BC) , (AC) et (AB) .
 - (b) Déterminer, exclusivement à l'aide du déterminant ou du produit scalaire, une équation cartésienne de la droite (AC) et une équation cartésienne de la normale Δ_B à (AC) passant par D .
En déduire les coordonnées de B' .
 - (c) Déterminer les coordonnées de A' et C' et vérifier que A', B', C' sont alignés.
2. On considère maintenant $S(1, 0)$ et M_1, M_2, M_3 trois points du cercle trigonométrique $\mathcal{C}(O, 1)$, deux à deux distincts, et distincts de S . On note e^{ia}, e^{ib}, e^{ic} les affixes des points M_1, M_2, M_3 avec a, b, c , réels.
On note H_1, H_2, H_3 (d'affixes h_1, h_2, h_3) les projetés orthogonaux de S sur (M_2M_3) , (M_1M_3) , (M_1M_2) respectivement.
 - (a) Rappeler les expressions du produit scalaire et du déterminant de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes respectives z et z' .
 - (b) Déterminer un système d'équations caractérisant h_1 faisant intervenir b et c .
 - (c) En déduire que $h_1 = \frac{1}{2}(e^{ib} + e^{ic} - e^{i(b+c)} + 1)$.
 - (d) Montrer que H_1, H_2, H_3 sont alignés.
3. Expliquer quelle(s) transformation(s) géométrique(s) permet de déduire de la question précédente, sans nouveaux calculs, le résultat suivant :
Si quatre points deux à deux distincts sont cocycliques alors les projetés orthogonaux de l'un d'eux sur les trois droites formées par les trois autres points sont alignés.

Exercice 3

Soient n et p deux entiers non nuls. Soient $a_1, a_2, \dots, a_p$, p entiers tels que $\sum_{i=1}^p a_i = n$.

Calculer le nombre d'applications de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans $\{1, 2, \dots, p\}$ telles que pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, i a exactement a_i antécédents.

Exercice 4

Soit E un ensemble à np éléments ($n, p \in \mathbb{N}^*$).

On note $P_{n,p}$ le nombre de partitions de E en n parties à p éléments.

Montrer que

$$P_{n,p} = \frac{1}{n} \binom{np}{p} P_{n-1,p}$$

En déduire la valeur de $P_{n,p}$.

Exercice 5

1. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^*$ et $S_{n,p}$ le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

(a) On suppose que $p < n$. Que vaut $S_{p,n}$?

(b) Calculer $S_{n+1,n}$ et $S_{p,2}$.

(c) Montrer que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \quad n^p = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} S_{p,i}$$

2. On note d_n , le nombre de permutations σ de $\mathbb{N}_n$ n'admettant aucun point fixe (on dit que σ est un dérangement de $\mathbb{N}_n$). Par convention $d_0 = 1$.

(a) Exprimer d_1, d_2 .

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k}$$

3. D'une façon ou d'une autre (transformée de Pascal, inversion de matrice, séries génératrices, calcul direct, formule du crible de Poincaré...), donner une expression explicite (sous forme de sommes finies) de $S_{p,n}$ et de d_n .