# Devoir à la maison n°9

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole ($*$) voire ($**$). La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

---

Le but de ce DM est d'essayer de **comprendre « la structure algébrique » des matrices magiques**.
Quand vous étiez petit vous avez sûrement joué à compléter un tableau magique, c'est à dire un tableau où la somme des coefficients en ligne, colonne ou diagonale est toujours égal à un même nombre. Comme un tableau c'est une matrice, nous allons essayer d'employer la théorie des matrices sur ces tableaux magiques.

Pour commencer nous rappelons quelques définitions sur les matrices magiques et quasi-magiques, puis nous clarifions quelques notations. Les préliminaires nous permettent de bien voir que ce problème des tableaux magiques est bien un problème linéaire. La première partie consiste à étudier à partir d'exemples les matrices magiques de taille $3 \times 3$, de comprendre qu'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 3. Dans la seconde partie nous nous attaquons aux matrices de taille $n$ ( entier quelconque supérieur à 3).

---

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de base canonique $(E_{i,j})_{i,j}$.
Rappel : $E_{i,j}$ est la matrice de $E$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la ligne $i$ et colonne $j$ qui vaut 1.
On note $\forall\ i, j \in [\![1, n]\!]$ et $\forall\ A = (a_{i,j}) \in E$ :

$$\begin{array}{cc}
\sigma_j(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} & \text{(somme des éléments de la } j^{\text{ième}} \text{ colonne de } A) \\
\tau_i(A) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} & \text{(somme des éléments de la } i^{\text{ième}} \text{ ligne de } A) \\
s(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,k} & \text{(somme des éléments de la première diagonale de } A) \\
t(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,n-k} & \text{(somme des éléments de la seconde diagonale de } A)
\end{array}$$

On note $Mag = \{A \in E \mid \forall\ i, j : \sigma_j(A) = \tau_i(A) = s(A) = t(A)\}$, l'ensemble des matrices magiques.
On note $PMag = \{A \in E \mid \forall\ i, j : \sigma_j(A) = \tau_i(A)\}$, l'ensemble des matrices pseudo-magiques, c'est à dire magiques sur les lignes et colonnes, mais pas nécessairement sur les diagonales.
On définit alors $d : Mag^* \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\forall\ A \in Mag^*$, $d(A) = \sigma_1(A)$.

## 1.Préliminaires

1. Montrer que $\forall\ r \in [\![1, n]\!]$, $\sigma_r, \tau_r, s$ et $t$ sont des formes linéaires de $E$.
2. En déduire que $PMag$ est un sev de $E$, puis que $Mag$ est un sev de $PMag$.
3. Montrer que $d$ est une forme linéaire sur $PMag$.

## 2. Etude des tableaux magiques $3 \times 3$

Dans cette partie (et uniquement) : $n = 3$.

1. Petite observation et cas particuliers...
   (a) On considère $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 3}} \in Mag$. Montrer que le coefficient $3a_{2,2} = d(A)$.

   (b) Compléter la matrice suivante sachant que c'est une matrice magique

   $$\begin{bmatrix} 5 & 2 & \cdot \\ \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

   (c) Qu'en concluez vous à propos de la dimension de $Mag$ ?

(d) Pouvez-vous compléter les trois matrices suivantes sachant qu'elles sont magiques ?

$$\begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 \end{bmatrix}$$

2. Recherche de l'ensemble des solutions
   (a) Soit $A \in Mag$, montrer que les 9 coefficients de $A$ sont solutions d'un système de 7 équations à 9 inconnues.
   (b) Quel est le rang de ce système d'équation ?
   (c) Montrer que

$$Mag = \text{vect}\left( \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

   (d) Quelles remarques faites vous alors à propos des matrices à compléter de la question 7. ?

## 3. Etude généralisé sur les tableaux de taille $n \times n$

$n$ est à nouveau quelconque dans cette partie ($n \geq 3$).
On note $J$ la matrice de $E$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Caractérisation des matrices pseudo-magiques et étude de $d$
   (a) Montrer que $A \in PMag$ ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A \times J = J \times A = \lambda \cdot J$
   Quel est le rapport entre ce $\lambda$ et $d(a)$ ?
   (b) Montrer que $d$ est un morphisme d'anneaux, c'est à dire :

$$\forall\ A, B \in PMag \quad d(A+B) = d(A) + d(B) \text{ et } d(A \times B) = d(A) \times d(B)$$

   (c) Montrer alors que si $A \in PMag$, inversible alors $d(A) \neq 0$ et $A^{-1} \in PMag$.
   Exprimer alors $d(A^{-1})$ en fonction de $d(A)$.
   (d) Réciproquement a-t-on pour tout $A \in PMag$, $d(A) \neq 0 \Longrightarrow A$ inversible ?

2. Décomposition de $PMag$ en espaces supplémentaires.
   On définie : $\mathcal{M}_1^* = \text{Ker } d$ et $\mathcal{M}_2 = \text{vect} J$. Ce sont des sous espaces vectoriels.
   (a) Montrer que $\mathcal{M}_1^* \oplus \mathcal{M}_2 = PMag$
   (b) On pose $\forall\ i, j \in [|2, n|] : A_{i,j} = E_{1,1} + E_{i,j} - E_{i,1} - E_{1,j}$.
   Montrer alors que la famille $(A_{i,j})_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}}$ est une base de $\mathcal{M}_1^*$.
   (c) En déduire les dimensions de $\mathcal{M}_1^*$ et de $PMag$.
   (d) Donner une matrice de taille 3, pseudo-magique mais non magique.

3. La dimension de $Mag$ !
   On définie pour finir $\mathcal{M}_1 = \text{Ker } d_{|Mag} = (\text{Ker } d) \cap (Mag)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 = Mag$
   (b) Montrer que $\dim(\mathcal{M}_1) = \dim(\mathcal{M}_1^*) - 2$.
   (On pourra montrer que $\mathcal{M}_1 = \{A \in \mathcal{M}_1^* \mid t(A) = s(A) = 0\}$)
   (c) Conclure enfin que $\dim Mag = n(n-2)$ et essayer de compléter les matrices magiques (justifier et commenter chacun de vos résultats) :

$$\begin{bmatrix} 5 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 3 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & \cdot & 1 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 3 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & 2 & 0 \end{bmatrix}$$