

Devoir à la maison n°9 CORRECTION

1. Préliminaires

1. Soit $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Soient $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\sigma_r(\lambda A + \mu B) = \sum_{k=1}^n (\lambda a_{k,j} + \mu b_{k,j}) = \lambda \sum_{k=1}^n a_{k,j} + \mu \sum_{k=1}^n b_{k,j}$$

Et donc $\sigma_r(\lambda A + \mu B) = \lambda \sigma_r(A) + \mu \sigma_r(B)$

De même pour τ_r, s et t .

Ainsi $\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma_r, \tau_r, s$ et t sont des formes linéaires de E

2. Soit $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \varphi_k = \sigma_k - \sigma_1$ et $\psi_k = \tau_k - \tau_1$.

Alors φ_k et ψ_k sont des applications linéaires de E .

Et $PMag = \bigcap_{k=2}^n (\text{Ker}(\varphi_k) \cap (\text{Ker}(\psi_k)))$.

Comme une intersection d'espace vectoriel est un espace vectoriel, on en déduit

$PMag$ est un sev de E

De même $Mag = \text{Ker}(s - \sigma_1)|_{PMag} \cap \text{Ker}(t - \tau_1)|_{PMag}$, d'où

Mag est un sev de $PMag$.

3. Il faut d'abord bien constater que d est bien définie sur $PMag$.

Puis, comme $\sigma_1 : d$ est linéaire.

Enfin, l'espace d'arrivée étant $\mathbb{R}$, on conclue que

d est une forme linéaire sur $PMag$

2. Etude des tableaux magiques 3×3

1. Petite observation et cas particuliers...

(a) On considère $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} \in Mag$.

Comme c'est une matrice magique, elle vérifie donc :

$$3d = s(A) + \sigma_2(A) + t(A) \quad \text{et} \quad 2d = \tau_1 + \tau_3$$

$$\begin{cases} 3d = (a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}) + (a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2}) + (a_{3,1} + a_{2,2} + a_{1,3}) \\ 2d = (a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3}) + (a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3}) \end{cases}$$

Et donc en soustrayant, on obtient :

$$a_{2,2} = \frac{1}{3}d(A)$$

(b) Puisque c'est une matrice magique, on a donc $d(A) = 3 \times a_{2,2} = 9$ puis on complète et finalement on obtient

$$\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ 0 & \mathbf{3} & 6 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Ainsi, nous voyons qu'il suffit de trois valeurs (bien situées) dans une matrice de taille 3 pour générer une matrice magique. Cela nous donne le sentiment que **3** « valeurs » **génèrent** les vecteurs de Mag .

Ainsi comme Mag est un $\mathbb{R}$.v. de dimension finie, on en conclue que $\dim Mag \leq 3$

On peut se demander si la donnée de trois valeurs : $a_{1,1} = a, a_{1,2} = b$ et $a_{2,2} = c$ permettent de générer toutes les matrices magiques... cela semble possible, la matrice suivante nous le montre :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & 3c - a - b \\ 4c - 2a - b & \mathbf{c} & 2a + b - 2c \\ a + b - c & 2c - b & 2c - a \end{bmatrix}$$

- (d) On essaye de compléter les matrices suivantes, en commentant nos calculs, cela permettra de comprendre les coefficients importants!

On sait que $(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2})$ est un triplet base. Pour chacune des matrices, on va noter comme paramètre $\lambda = a_{2,2}$ et donc $d(A) = 3\lambda$.

Dans ce cas, la première matrice devient

$$\begin{bmatrix} 2\lambda - 2 & 1 & \lambda + 1 \\ 3 & \lambda & 2\lambda - 3 \\ \lambda - 1 & 2\lambda - 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Et l'on se rend compte, que cette matrice est bien magique, mais n'est pas unique... $(a_{1,2}, a_{2,1}, a_{3,3})$ n'est pas d'un triplet de base.

Par exemple, on peut avoir

$$\lambda = 0 : \begin{bmatrix} -2 & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{3} & 0 & -3 \\ -1 & -1 & \mathbf{2} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \lambda = 2 : \begin{bmatrix} 2 & \mathbf{1} & 3 \\ \mathbf{3} & 2 & 1 \\ 1 & 3 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

La seconde matrice impose $d(A) = 3 + 4 + 5 = 12$ et $a_{2,2} = 4$, soit la matrice magique unique :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3})$ est un triplet de base.

Pour la troisième matrice, on aurait $d(A) = 3a_{2,2} = 9$, et $d(A) = 5 + 3 + 2 = 10$, ce qui donne une contradiction. Cela signifie que lorsqu'une matrice est magique, les trois coordonnées $a_{1,1}, a_{2,2}$ et $a_{3,3}$ sont linéairement dépendants!

Ce résultat comme d'ailleurs celui obtenu à propos de la première matrice, nous amène à croire que $\dim \text{Mag} \geq 3$.

2. Recherche de l'ensemble des solutions

- (a) Soit $A \in \text{Mag}$, alors les coefficients de A vérifient les équations $\sigma_2(A) - \sigma_1(A) = \sigma_3(A) - \sigma_1(A) = \tau_1(A) - \sigma_1(A) = \tau_2(A) - \sigma_1(A) = \tau_3(A) - \sigma_1(A) = s(A) - \sigma_1(A) = t(A) - \sigma_1(A) = 0$. Ils sont donc solutions du système (S) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_{1,1} \quad -a_{1,2} \quad -a_{1,3} \quad a_{2,1} \quad +a_{2,2} \quad +a_{2,3} \quad \quad \quad = 0 \\ -a_{1,1} \quad -a_{1,2} \quad -a_{1,3} \quad \quad \quad \quad \quad +a_{3,1} \quad +a_{3,2} \quad +a_{3,3} = 0 \\ \quad \quad -a_{1,2} \quad -a_{1,3} \quad +a_{2,1} \quad \quad \quad \quad \quad +a_{3,1} \quad \quad \quad = 0 \\ -a_{1,1} \quad \quad \quad -a_{1,3} \quad \quad +a_{2,2} \quad \quad \quad \quad \quad +a_{3,2} \quad \quad \quad = 0 \\ -a_{1,1} \quad -a_{1,2} \quad \quad \quad \quad \quad +a_{2,3} \quad \quad \quad \quad \quad +a_{3,3} = 0 \\ \quad \quad -a_{1,2} \quad -a_{1,3} \quad \quad +a_{2,2} \quad \quad \quad \quad \quad +a_{3,3} = 0 \\ -a_{1,1} \quad -a_{1,2} \quad \quad \quad \quad +a_{2,2} \quad \quad \quad \quad +a_{3,1} \quad \quad \quad = 0 \end{array} \right.$$

les 9 coefficients de A sont solutions d'un système de 7 équations à 9 inconnues.

- (b) Le système est composé de 7 équations à 9 inconnues, on applique le pivot de Gauss pour résoudre le système (S)

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_{1,1} \quad -a_{1,2} \quad -a_{1,3} \quad a_{2,1} \quad +a_{2,2} \quad +a_{2,3} \quad \quad \quad = 0 \\ \quad \quad a_{1,2} \quad \quad \quad -a_{2,1} \quad \quad \quad -a_{2,3} \quad \quad \quad +a_{3,2} \quad \quad \quad = 0 \quad L_4 - L_1 \\ \quad \quad -a_{1,2} \quad -a_{1,3} \quad +a_{2,1} \quad \quad \quad \quad \quad +a_{3,1} \quad \quad \quad = 0 \\ \quad \quad \quad -a_{2,1} \quad -a_{2,2} \quad -a_{2,3} \quad +a_{3,1} \quad +a_{3,2} \quad +a_{3,3} = 0 \quad L_2 - L_1 \\ \quad \quad \quad \quad a_{1,3} \quad -a_{2,1} \quad -a_{2,2} \quad \quad \quad \quad \quad +a_{3,3} \quad \quad \quad = 0 \quad L_5 - L_1 \\ \quad \quad -a_{1,2} \quad -a_{1,3} \quad \quad +a_{2,2} \quad \quad \quad \quad \quad +a_{3,3} \quad \quad \quad = 0 \\ \quad \quad \quad a_{1,3} \quad -a_{2,1} \quad \quad \quad -a_{2,3} \quad +a_{3,1} \quad \quad \quad = 0 \quad L_7 - L_1 \\ -a_{1,1} \quad -a_{1,2} \quad -a_{1,3} \quad a_{2,1} \quad +a_{2,2} \quad +a_{2,3} \quad \quad \quad = 0 \\ \quad \quad a_{1,2} \quad \quad \quad -a_{2,1} \quad \quad \quad -a_{2,3} \quad \quad \quad +a_{3,2} \quad \quad \quad = 0 \\ \quad \quad \quad -a_{1,3} \quad \quad \quad \quad \quad -a_{2,3} \quad +a_{3,1} \quad +a_{3,2} \quad \quad \quad = 0 \quad L_3 + L_2 \\ \quad \quad \quad \quad -a_{2,1} \quad -a_{2,2} \quad -a_{2,3} \quad +a_{3,1} \quad +a_{3,2} \quad +a_{3,3} = 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad a_{1,3} \quad -a_{2,1} \quad -a_{2,2} \quad \quad \quad \quad \quad +a_{3,3} \quad \quad \quad = 0 \\ \quad \quad \quad -a_{1,3} \quad -a_{2,1} \quad +a_{2,2} \quad -a_{2,3} \quad \quad \quad +a_{3,2} \quad +a_{3,3} = 0 \quad L_6 + L_2 \\ \quad \quad \quad a_{1,3} \quad -a_{2,1} \quad \quad \quad -a_{2,3} \quad +a_{3,1} \quad \quad \quad = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} -a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} & a_{2,1} & +a_{2,2} & +a_{2,3} & & = 0 \\ & a_{1,2} & & -a_{2,1} & & -a_{2,3} & +a_{3,2} & = 0 \\ & & -a_{1,3} & & & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} = 0 \\ & & & -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} +a_{3,3} = 0 \\ & & & -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} +a_{3,3} = 0 & L_5 + L_3 \\ & & & -a_{2,1} & +a_{2,2} & & -a_{3,1} & +a_{3,3} = 0 & L_6 - L_3 \\ & & & -a_{2,1} & & -2a_{2,3} & +2a_{3,1} & +a_{3,2} = 0 & L_7 + L_3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} -a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} & a_{2,1} & +a_{2,2} & +a_{2,3} & & = 0 \\ & a_{1,2} & & -a_{2,1} & & -a_{2,3} & +a_{3,2} & = 0 \\ & & -a_{1,3} & & & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} = 0 \\ & & & -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} +a_{3,3} = 0 \\ & & & & & 0 & & = 0 & L_5 - L_4 \\ & & & & a_{2,2} & -a_{2,3} & +a_{3,1} & -a_{3,3} = 0 & L_7 - L_4 \\ & & & & +2a_{2,2} & a_{2,3} & -2a_{3,1} & -a_{2,3} = 0 & L_6 - L_4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} -a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} & a_{2,1} & +a_{2,2} & +a_{2,3} & & = 0 \\ & a_{1,2} & & -a_{2,1} & & -a_{2,3} & +a_{3,2} & = 0 \\ & & -a_{1,3} & & & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} = 0 \\ & & & -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} +a_{3,3} = 0 \\ & & & & a_{2,2} & -a_{2,3} & +a_{3,1} & -a_{3,3} = 0 \\ & & & & 3a_{2,3} & -4a_{3,1} & -a_{2,3} & 2a_{3,3} = 0 & L_7 - 2L_6 \end{array} \right.$$

Ainsi,

le rang du système vaut 6.

On peut donc choisir 3=9-6 paramètres.

L'espace vectoriel du « noyau du système » sera donc de dimension 3.

(c) Nous allons choisir les trois paramètres :

$$z = \frac{1}{3}(a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3})$$

$$x = \frac{1}{3}(a_{3,1} + a_{3,2} - 2a_{3,3})$$

$$y = \frac{1}{3}(2a_{3,1} - a_{3,2} - a_{3,3})$$

(En nous inspirant du résultat à trouver, sinon on aurait pu choisir comme paramètre les trois éléments d'un triplet de base...)

Le système (S) donne

$$(S) : \left\{ \begin{array}{lll} a_{3,1} = y + z & a_{3,2} = x - y + z & a_{3,3} = -x + z \\ a_{2,3} = -x - y + z & a_{2,2} = z & a_{2,3} = x + y + z \\ a_{1,3} = x + z & a_{2,3} = -x + y + z & a_{3,3} = -y + z \end{array} \right.$$

$$\text{Et donc } A = x \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ainsi

$$\text{Mag} = \text{vect} \left(\left[\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right] \right)$$

- (d) On remarque que les deux triplets proposés pour la première et troisième matrice de la question 7 ne permettent pas d'avoir la connaissance de z pour le premier cas et de y pour le second. Cette ignorance nous rend impossible de trouver une unique solution.

3. Etude généralisé sur les tableaux de taille $n \times n$

1. Caractérisation des matrices pseudo-magiques et étude de d

$$(a) \forall A \in E, AJ = \begin{pmatrix} \tau_1(A) & \cdots & \tau_1(A) \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_n(A) & \cdots & \tau_n(A) \end{pmatrix} \text{ et } JA = \begin{pmatrix} \sigma_1(A) & \cdots & \sigma_1(A) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_n(A) & \cdots & \sigma_n(A) \end{pmatrix}$$

Donc si $A \in PMag$ $A \times J = J \times A = d(a) \cdot J$

Réciproquement, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A \times J = J \times A = \lambda \cdot J$

Cela signifie donc que $\forall i \in [1, n], \sigma_i(A) = \tau_i(A) = \lambda$, et donc $A \in PMag$.

Par double implication :

$$A \in PMag \text{ ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } A \times J = J \times A = \lambda \cdot J \text{ et dans ce cas } \lambda \text{ et } d(a)$$

- (b) On constate d'abord que si $A, B \in PMag$, alors $A+B$ et $A \times B \in PMag$. Pour montrer ce que l'on vient d'énoncer et les relations vérifiées par d , on utilise la caractéristique précédente.

Pour $A+B$, c'est facile à montrer :

$$(A+B) \times J = A \times J + B \times J = [d(A) + d(B)] \times J,$$

$$\text{et de même } J \times (A+B) = [d(A) + d(B)] \times J.$$

Par conséquent : $A+B \in PMag$ et $d(A+B) = d(A) + d(B)$.

En ce qui concerne $A \times B$, on a :

$$(A \times B) \times J = A \times (B \times J) = d(B) \cdot A \times J = d(A)d(B)J$$

$$\text{et de même } J \times (A \times B) = d(A)d(B)J.$$

Ainsi on peut affirmer que $A \times B \in PMag$ et $d(A \times B) = d(A) \times d(B)$. Donc

d est un morphisme d'anneaux

- (c) Soit $A \in PMag$ inversible, alors $A \times J = d(A)J$, donc $A^{-1} \times A \times J = I_n \times J = d(A)A^{-1}J$ c'est à dire que $J = d(A)A^{-1} \times J$, donc $d(A) \neq 0$ (sinon, on aurait $J = 0_n$).

$$\text{Puis donc } A^{-1} \times J = \frac{1}{d(A)}J \text{ et de même : } J \times A^{-1} = \frac{1}{d(A)}J$$

Ainsi

si $A \in PMag$ inversible alors $d(A) \neq 0$, $A^{-1} \in PMag$ et $d(A^{-1}) = \frac{1}{d(A)}$.

- (d) $J \in PMag$, car $J^2 = nJ$, et $d(J) = n \neq 0$.

Or J n'est pas inversible (la première colonne de J est égale à la seconde!).

Donc

la réciproque est fausse.

2. Décomposition de $PMag$ en espaces supplémentaires.

On définit : $\mathcal{M}_1^* = \text{Ker } d$ et $\mathcal{M}_2 = \text{vect } J$.

- (a) Analyse : Soit $A = B + \lambda J$ où $B \in \mathcal{M}_1^*$. Alors $d(A) = d(B) + \lambda d(J)$,

$$\text{donc } \lambda = \frac{d(A)}{n}, \text{ car } d(J) = n \text{ et } d(B) = 0; \text{ puis } B = A - \frac{d(A)}{n}J$$

La décomposition est donc nécessairement unique.

Synthèse : Soit $A \in PMag$. Soit $B = A - \frac{d(A)}{n}J$, alors $B \in PMag$.

$$\text{Et } d(B) = d(A) - \frac{d(A)}{n}d(J) = d(A) - \frac{d(A)}{n}n = 0; \text{ donc } B \in \mathcal{M}_1^*$$

$$\text{Et aussi } \frac{d(A)}{n}J \in \mathcal{M}_2. \text{ Comme } A = B + \frac{d(A)}{n}J$$

On peut conclure que $\mathcal{M}_1^* \oplus \mathcal{M}_2 = PMag$

- (b) On pose $\forall i, j \in [2, n] : A_{i,j} = E_{1,1} + E_{i,j} - E_{i,1} - E_{1,j}$.

On sait déjà que la famille $(A_{i,j})_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}}$ est libre.

De plus $\forall 2 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq n, A_{i,j} \in \mathcal{M}_1^*$ (cette remarque n'est pas nécessaire).

Enfin, montrons qu'elle est génératrice de cet espace.

$$\text{Soit } B \in \mathcal{M}_1^* \subset E, \text{ donc on sait que } B = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} b_{i,j} E_{i,j}.$$

Or $B \in \mathcal{M}_1^*$, d'où

$$\text{— } \forall i \in [2, n], b_{i,1} = - \sum_{2 \leq j \leq n} b_{i,j}$$

$$\text{— } \forall j \in [2, n], b_{1,j} = - \sum_{2 \leq i \leq n} b_{i,j}$$

$$\text{— } b_{1,1} = - \sum_{2 \leq j \leq n} b_{1,j} = \sum_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}} b_{i,j}$$

$$\text{Ce qui donne } B = b_{1,1}E_{1,1} + \sum_{2 \leq i \leq n} b_{i,1}E_{i,1} + \sum_{2 \leq j \leq n} b_{1,j}E_{1,j} + \sum_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}} b_{i,j}E_{i,j}$$

$$\text{soit } B = \left[\sum_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}} b_{i,j} \right] E_{1,1} - \sum_{2 \leq i \leq n} \sum_{2 \leq j \leq n} b_{i,j} E_{i,1} \\ - \sum_{2 \leq j \leq n} \sum_{2 \leq i \leq n} b_{1,j} E_{i,1} + \sum_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}} b_{i,j} E_{i,j}$$

$$\text{d'où } B = \sum_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}} b_{i,j} \underbrace{(E_{i,j} + E_{1,1} - E_{1,j} - E_{i,1})}_{A_{i,j}}$$

Donc

la famille $(A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une base de $\mathcal{M}_1^*$.

- (c) Nous avons trouvé une base de $\mathcal{M}_1^*$, composée de $(n-1)^2$ vecteurs, ainsi

$$\dim \mathcal{M}_1^* = (n-1)^2 \text{ et de } \dim PMag = n^2 - 2n + 1 \text{ (car } \dim \mathcal{M}_2 = 1).$$

- (d)

I_3 est pseudo-magique mais non magique.

3. La dimension de Mag !

- (a) Comme pour la question 16, $\forall A \in Mag, \exists!(B, \lambda) \in \mathcal{M}_1 \times \mathbb{R}$ tel que $A = B + \lambda J$, c'est le couple donné par $\lambda = \frac{d(a)}{n}$ et $B = A - \frac{d(a)}{n}J$.
On a bien ici $B \in \text{Ker } d$, mais surtout $B \in Mag$ (comme A).
Et donc

$$\boxed{\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 = Mag}$$

- (b) On sait que $\mathcal{M}_1 = \{A \in \mathcal{M}_1^* / t(A) = s(A) = 0\}$
On sait de plus que si $A' \in \mathcal{M}_1^*$, alors les n^2 coefficients de A' sont solutions d'un système de rang égale à $n^2 - \dim \mathcal{M}_1^* = 2n - 1$.
Donc si $A \in \mathcal{M}_1$, les n^2 coefficients de A sont les solutions d'un système d'équations de rang égale à $2n - 1 + 2$, ce +2 correspondant aux deux équations supplémentaire $t(A) = s(A) = 0$, à condition que celles-ci soient indépendante des précédente.
Mais c'est bien le cas, puisque l'on peut trouver une matrice de $\mathcal{M}_1^*$ mais avec $s(A) \neq 0$. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & & -1 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & -1 & & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et de même pour $t(A) \neq 0$

Ainsi $\dim \mathcal{M}_1 = n^2 - (2n + 1)$, i.e.

$$\boxed{\dim(\mathcal{M}_1) = \dim(\mathcal{M}_1^*) - 2 = n^2 - 2n - 1.}$$

- (c) On a donc $\dim Mag = n^2 - 2n = n(n - 2)$
On ne peut pas compléter la première matrice (du moins de manière unique), puisque nous est données 7 valeurs alors que $\dim Mag = 4 \times 2 = 8$. Précisément, on obtient en fonction d'un paramètre λ .

$$\boxed{\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & \lambda - 3 \\ \lambda - 5 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & \lambda - 3 & 4 \\ 2 & \lambda & 2 & 0 \end{bmatrix}}$$

Pour la seconde matrice $\lambda = 6$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$