

Devoir surveillé n°1

Durée de l'épreuve : 3 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème de trois parties. La troisième partie est moins bien notée. Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole (*) voire (**). La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.**

BON COURAGE

Problème. Suite de polynômes

Dans l'ensemble du problème, on considère une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales définies par récurrence par :

$$p_0 : x \mapsto x + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} : x \mapsto (n+1)xp_n + (1-x^2)p'_n(x)$$

On admet que cette définition, permet bien de générer une suite de polynômes (i.e. : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, p_n est bien une fonction polynomiale, parfaitement définie.).

On note dans l'ensemble de l'exercice, pour une fonction polynomiale f :

$$[f]_k \quad \text{le coefficient devant } x^k \text{ dans l'écriture unique } f : x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i \text{ (i.e. : } a_k \text{ ici).}$$

On a vu en cours que, pour tout entier k : $[f]_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Pour l'ensemble du devoir, on note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = [p_n]_0 = p_n(0)$

A Suite de fonctions polynomiales

/20

On étudie ici directement la suite de polynômes.

- Donner une expression développée, simplifiée et réduite de p_1 , p_2 et p_3 (on ne cherche pas à les factoriser).
- On admet que si f et g sont deux fonctions polynomiales :

$$\deg f' = \deg f - 1, \deg(f \times g) = \deg f + \deg g \text{ et } \deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g)$$

- Montrer, par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(p_n) \leq n$
 - Puis montrer que pour $n \geq 1$, $\deg p_n = n$ et que le coefficient dominant de p_n est $[p_n]_n = 1$
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}_n$, $[p_n]_k \in \mathbb{Z}$.
- Etude des racines de p_n .
 - Factoriser p_3
 - Montrer que pour tout entier n , -1 est une racine de p_n .
 - Factoriser p_4 .

- Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé. On note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

- Montrer que, pour tout réel x :

$$(n+1)xp_n(x) + (1-x^2)p'_n(x) = a_1 + \sum_{h=1}^{n-1} ((n-h+2)a_{h-1} + (h+1)a_{h+1})x^h + 2a_{n-1}x^n + a_n x^{n+1}$$

- En déduire, pour tout $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ une expression de $[p_{n+1}]_k$ en fonction des nombres $([p_n]_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.
- On a trouvé $p_6 : x \mapsto 61 + 272x + 479x^2 + 416x^3 + 179x^4 + 32x^5 + x^6$.
Donner alors l'expression de p_5 (à partir de p_6).

On note I , l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et h , la fonction auxiliaire infiniment dérivable sur I :

$$h : x \mapsto \frac{1 + \sin x}{\cos x}$$

1. Exprimer h' et h'' à l'aide des fonctions usuelles.
2. Montrer que pour tout $x \in I$,

$$h(x) = \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in I, \quad h^{(n)}(x) = \frac{p_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$$

On rappelle que $f \circ g$ est dérivable et que $(f \circ g)' = g' \times [(f') \circ g]$.

4. On rappelle que la suite $(\alpha_n)_n$ a été définie dans le propos introductif.
 - (a) Montrer que pour tout $x \in I$, $2h'(x) = 1 + (h(x))^2$.
 - (b) En déduire que $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$
 - (c) Plus largement, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}$$

On pourra ré-investir la démonstration de la formule du binôme de Newton pour démontrer un résultat par récurrence sur la dérivée $n+1$ de h ...

C. Permutations alternantes

/15

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une liste de n nombres réels.

On dit que la liste $(x_1, \dots, x_n)$ est alternante montante si $(-1)^i(x_i - x_{i-1}) > 0$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

On dit qu'elle est alternante descendante si $(-1)^i(x_i - x_{i-1}) < 0$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

Autrement dit, la liste $(x_1, \dots, x_n)$ est alternante montante si elle vérifie les inégalités $x_1 < x_2$ et $x_2 > x_3$ et $x_3 < x_4$... Elle est alternante descendante si elle vérifie les inégalités inverses.

Par exemple, $(1, 5, 3, 11, 8, 9)$ est alternante montante car $1 < 5$, $5 > 3$, $3 < 11$, $11 > 8$, $8 < 9$

et $(7, 4, 5, 2, 12)$ est alternante descendante car $7 > 4$, $4 < 5$, $5 > 2$ et $2 > 12$.

On dit qu'une permutation σ de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ est alternante montante (respectivement alternante descendante) si la liste $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ est alternante montante (respectivement alternante descendante).

Par exemple, avec $n = 7$ et en représentant toute permutation σ par la liste des images $(\sigma(1), \dots, \sigma(7))$, on constate que $(1, 5, 4, 6, 2, 7, 3)$ représente une permutation alternante montante et $(3, 2, 6, 4, 7, 1, 5)$ une permutation alternante descendante.

1. Dénombrement des permutations alternantes

- (a) Déterminer les permutations alternantes montantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.
- (b) (*) Montrer, pour tout $n \geq 2$, que le nombre de permutations alternantes montantes est égal au nombre de permutations alternantes descendantes.

Si $n \geq 2$, on note β_n le nombre de permutations alternantes montantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et on convient que $\beta_0 = \beta_1 = 1$.

- (c) Soient k et n deux entiers tels que $2 \leq k \leq n$ et A une partie à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On considère les listes $(x_1, \dots, x_k)$ constituées de k éléments deux à deux distincts de A . Montrer que le nombre de ces listes qui sont alternantes montantes est égal à β_k . Le nombre de celles qui sont alternantes descendantes est le même, mais on ne demande pas de le justifier.

- (d) (*) Montrer, pour tout entier $n \geq 1$, $2\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_k \beta_{n-k}$.

Indication : Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, dénombrer les permutations σ alternantes (montantes ou descendantes) de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ telles que $\sigma(k+1) = n+1$.

- (e) En déduire que $\beta_n = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Permutations aléatoires.

Pour tout entier $n \geq 2$, on munit l'ensemble Ω_n des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de la probabilité uniforme.

Ainsi, si $\omega \in \Omega_n$ est une permutation quelconque de $\mathbb{N}_n$, $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega_n)} = \frac{1}{n!}$.

On note π_n la probabilité qu'une permutation dans Ω_n soit alternante montante. On convient de plus que $\pi_0 = \pi_1 = 1$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \pi_k \pi_{n-k}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Quelle est la limite de la suite (π_n) ?

On définit une variable aléatoire M_n sur Ω_n en associant à toute permutation $\sigma \in \Omega_n$ l'entier $M_n(\sigma)$ tel que :

— $M_n(\sigma) = 2$ si $\sigma(1) > \sigma(2)$;

— $M_n(\sigma) = 3$ si $\sigma(1) < \sigma(2)$ mais $\sigma(2) < \sigma(3)$;

— $M_n(\sigma) = 4$ si $\sigma(1) < \sigma(2)$, $\sigma(2) > \sigma(3)$ mais $\sigma(3) > \sigma(4)$;

— ...

— $M_n(\sigma) = n+1$ si σ est alternante montante.

En d'autres termes, $M_n(\sigma) = k+1$ où k est le plus grand entier tel que $(\sigma(1), \dots, \sigma(k))$ soit alternante montante. On note $\mathbf{E}(M_n)$ l'espérance de M_n .

(c) (*) Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, montrer $\mathbf{P}(M_n > i) = \pi_i$.

(d) (**) Exprimer $\mathbf{E}(M_n)$ en fonction de $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(M_n) = \frac{\sin(1) + 1}{\cos(1)}$$