Devoir à la maison n°1

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice 1

Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & +y & & -t & +u & = 1 \\ & -y & +2z & -t & -u & = 2 \\ x & -y & +z & -t & & = -1 \\ x & & & +t & -u & = 0 \end{array}\right.$$

(On raisonnera, par suite de systèmes équivalents)

Exercice 2

1. On note, pour tout entier n, $Q_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$. On cherche une nouvelle façon de démontrer le résultat vu en cours.
   (a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = 2 \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} jk$
   (b) Montrer ensuite que $2 \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} jk = \sum_{j=1}^{n} j^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2$. Conclure
2. (a) On considère (a_k) et (b_k) deux familles de nombres réels.
   Donner une expression développée (relativement simple) de
   $$\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (a_j b_k - a_k b_j)(c_j d_k - c_k d_j)$$
   (b) En déduire l'identité de Lagrange
   $$\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (a_j b_k - a_k b_j)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$
   (c) Puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
   $$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

Exercice 3

Soient P et Q deux fonctions polynomiales (polynômes). On dit que P et Q commutent si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note pour tout l'exercice $T : x \mapsto x^2 - \alpha$.

1. Trouver tous les polynômes degré au plus 3 commutant avec T.
2. Montrer qu'il existe au plus un polynôme de degré donné ($\geqslant 1$) commutant avec un polynôme unitaire de degré 2 donné (unitaire = le coefficient associé au monôme du plus haut degré vaut 1).
   On pourra raisonner avec un système d'équations (non linéaires).
3. Trouver tous les polynômes de degré 4 et 8 commutant avec un polynôme unitaire de degré 2 donné.
4. Montrer que si P et Q commutent avec un polynôme R unitaire de degré 2, alors ils commutent.
   On pourra exploiter la question 2.
5. Démontrer qu'il existe une suite infinie de polynômes $(P_n)_n$ telle que le degré de P_n soit égal à n, $P_2 : x \mapsto x^2 - 2$ et les termes de cette suite commutent deux à deux.
   On peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x) \ldots$