

Devoir à la maison n°1 CORRECTION

Exercice 1

On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}
 S &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc|c} x & +y & -t & +u & = 1 \\ & -y & +2z & -t & -u = 2 \\ & -2y & +z & & -u = -2 \\ & -y & & +2t & -2u = -1 \end{array} \right. \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc|c} x & +y & -t & +u & = 1 \\ & -y & +2z & -t & -u = 2 \\ & & -3z & +2t & +u = -6 \\ & & -2z & +3t & -u = -3 \end{array} \right. \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc|c} x & +y & -t & & = 1 \\ & -y & +2z & -t & = 2 \\ & & -3z & +2t & = -6 \\ & & & 5t & = 3 \end{array} \right. \begin{array}{l} -u \\ +u \\ -u \\ +5u \end{array} \left. \begin{array}{l} L_4 \leftarrow 3L_4 - 2L_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc|c} x & +y & & & = \frac{8}{5} \\ & -y & +2z & & = \frac{13}{5} \\ & & -3z & & = -\frac{36}{5} \\ & & & t & = \frac{3}{5} \end{array} \right. \begin{array}{l} +2u \\ -3u \\ +u \end{array} \left. \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{5}L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{5}L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{5}L_4 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{5}L_4 \end{array} \right. \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc|c} x & +y & & & = \frac{8}{5} \\ & -y & & & = -\frac{11}{5} \\ & & z & & = \frac{12}{5} \\ & & & t & = \frac{3}{5} \end{array} \right. \begin{array}{l} +u \\ +u \\ +u \end{array} \left. \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3}L_3 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc|c} x & & & & = -\frac{3}{5} \\ y & & & & = \frac{11}{5} \\ z & & & & = \frac{12}{5} \\ t & & & & = \frac{3}{5} \\ u & & & & = u \end{array} \right. \begin{array}{l} +u \\ +u \\ +u \end{array} \left. \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array} \right. \\
 &\boxed{S = \left\{ \left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, \frac{12}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right) + \lambda(0, 0, 1, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R} \right\}}
 \end{aligned}$$

Exercice 2

1. On note, pour tout entier n , $Q_n = \sum_{k=0}^n k^3$.

(a) On trouve directement

$$\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} jk = \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{j=1}^k j \right) = \sum_{k=1}^n \left(k \frac{k(k+1)}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^3 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2$$

On trouve donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k^2 = 2 \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} jk}$$

(b) Et par ailleurs,

$$\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} jk = \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} jk$$

Notons cette somme S , on a alors

$$2S = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} jk + \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} jk = \sum_{1 \leq j=k \leq n} jk + \sum_{1 \leq j, k \leq n} jk = \sum_{j=1}^n j^2 + \left(\sum_{j=1}^n j \right) \times \left(\sum_{k=1}^n k \right)$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{j=1}^n j^2 + \left(\sum_{j=1}^n j \right)^2$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{j=1}^n j \right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2}$$

2. (a) On considère (a_k) et (b_k) deux familles de nombres réels.

☀ Piste de recherche...

En lisant la question suivante, il semble qu'il faudra prendre $c_k = a_k$ et $d_k = b_k$.

La formule doit donc alors donner la seconde partie de l'égalité de LAGRANGE lorsque les coefficients sont identifiées.

On peut donc imaginer que là où on trouve a_k^2 , il faudrait avoir par symétrie : $a_k c_k$ et là où l'on trouve a_k , on doit trouver $\frac{1}{2}(a_k + c_k)$...

C'est plus facile lorsqu'on sait ce qu'il faut démontrer, ici probablement :

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_j b_k - a_k b_j)(c_j d_k - c_k d_j) = \left(\sum_{k=1}^n a_k c_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k d_k \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right) \left(\sum_{k=1}^n c_k d_k \right)$$

Quelques calculs montrent qu'il s'agit plutôt de :

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_j b_k - a_k b_j)(c_j d_k - c_k d_j) = \left(\sum_{k=1}^n a_k c_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k d_k \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k d_k \right) \left(\sum_{k=1}^n c_k b_k \right)$$

Comme les variables sont muettes :

$$S = \left(\sum_{k=1}^n a_k c_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k d_k \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k d_k \right) \left(\sum_{k=1}^n c_k b_k \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n a_k b_h c_k d_h - \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n a_k b_h c_h d_k$$

On sépare le cas $h = k$ dans chacune des deux sommes (quitte à avoir des sommes vides) :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n \left(\left[\sum_{h=1}^{k-1} a_k b_h c_k d_h \right] + a_k b_k c_k d_k + \left[\sum_{h=k+1}^n a_k b_h c_k d_h \right] \right) - \sum_{k=1}^n \left(\left[\sum_{h=1}^{k-1} a_k b_h c_h d_k \right] + a_k b_k c_k d_k + \left[\sum_{h=k+1}^n a_k b_h c_h d_k \right] \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\left[\sum_{h=1}^{k-1} a_k b_h c_k d_h - a_k b_h c_h d_k \right] \right) + \sum_{k=1}^n \left(\left[\sum_{h=k+1}^n a_k b_h c_k d_h - a_k b_h c_h d_k \right] \right) \\ &= \underbrace{\sum_{1 \leq h < k \leq n} (a_k b_h c_k d_h - a_k b_h c_h d_k)}_{i=h, j=k} + \underbrace{\sum_{1 \leq k < h \leq n} (a_k b_h c_k d_h - a_k b_h c_h d_k)}_{i=k, j=h} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j b_i c_j d_i - a_j b_i c_i d_j + a_i b_j c_i d_j - a_i b_j c_j d_i) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j b_i - a_i b_j)(d_i c_j - d_j c_i) \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_j b_k - a_k b_j)(c_j d_k - c_k d_j) = \left(\sum_{k=1}^n a_k c_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k d_k \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k d_k \right) \left(\sum_{k=1}^n c_k b_k \right)}$$

(b) Ainsi, en prenant $c_k = a_k$ et $b_k = d_k$, on obtient l'identité de LAGRANGE

$$\boxed{\sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_j b_k - a_k b_j)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2}$$

(c) Comme, pour tout k, j , $(a_j b_k - a_k b_j)^2 \geq 0$, la somme suivante est positive :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \geq 0$$

Donc

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2$$

Puis, comme tous les nombres, dont on prend le carré sont positifs, nous pouvons prendre la racine carrée de cette expression, on a alors l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}}$$

Exercice 3

Soient P et Q deux fonctions polynomiales (polynômes). On dit que P et Q commutent si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note pour tout l'exercice $T : x \mapsto x^2 - \alpha$.

1. Soit $P : x \mapsto a + bx + cx^2 + dx^3$.

$$\begin{aligned} P \circ T = T \circ P &\iff \forall x \in \mathbb{R}, a + b(x^2 - \alpha) + c(x^2 - \alpha)^2 + d(x^2 - \alpha)^3 = (a + bx + cx^2 + dx^3)^2 - \alpha \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, (a - b\alpha + c\alpha^2 - d\alpha^3) + (b - 2c\alpha + 3d\alpha^2)x^2 + (c - 3d\alpha)x^4 + dx^6 \\ &\quad = (a^2 - \alpha) + 2abx + (b^2 + 2ac)x^2 + 2(ad + bc)x^3 + (c^2 + 2bd)x^4 + 2cdx^5 + d^2x^6 \end{aligned}$$

Le résultat est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ (ensemble infini), donc on peut identifier (cf ajout du cours) :

$$P \circ T = T \circ P \iff \begin{cases} a - b\alpha + c\alpha^2 - d\alpha^3 &= a^2 - \alpha \\ 0 &= 2ab \\ b - 2c\alpha + 3d\alpha^2 &= b^2 + 2ac \\ 0 &= 2(ad + bc) \\ c - 3d\alpha &= c^2 + 2bd \\ 0 &= 2cd \\ d &= d^2 \end{cases}$$

🔍 Remarques !

⚡ Attention ! Ce système n'est pas linéaire, on ne peut malheureusement pas travailler par pivot de Gauss

On a donc **nécessairement** $d^2 - d = 0$, i.e. $d(d - 1) = 0$ donc $d = 0$ ou $d = 1$.

— a. Supposons $d = 0$.

On trouve alors le système (il n'y a qu'une implication) :

$$P \circ T = T \circ P, d = 0 \implies \begin{cases} a - b\alpha + c\alpha^2 &= a^2 - \alpha \\ 0 &= 2ab \\ b - 2c\alpha &= b^2 + 2ac \\ 0 &= 2bc \\ c &= c^2 \end{cases}$$

On trouve, de même $c = 0$ ou $c = 1$.

— a.1. Supposons, en outre $c = 0$ On trouve alors le système (il n'y a qu'une implication) :

$$P \circ T = T \circ P, d = 0, c = 0 \implies \begin{cases} a - b\alpha &= a^2 - \alpha \\ 0 &= 2ab \\ b &= b^2 \end{cases}$$

Donc, de même $b = 0$ ou $b = 1$

— a.1.α Supposons, en outre $b = 0$ On trouve alors le système (il n'y a qu'une implication) :

$$P \circ T = T \circ P, d = 0, c = 0, b = 0 \implies \begin{cases} a &= a^2 - \alpha \end{cases}$$

Donc, $a^2 - a - \alpha = 0$, polynôme de la variable a de degré 2 et de discriminant $\Delta = 1 + 4\alpha$.

Si $\alpha \geq -\frac{1}{4}$: $a^2 - a - \alpha = (a - \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2})(a - \frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}) = 0$.

Réciproquement, les fonctions polynomiales $P : x \mapsto \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$ et $P : x \mapsto \frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}$, commutent avec T .

— a.1.β Supposons, en outre $b = 1$

$$P \circ T = T \circ P, d = 0, c = 0, b = 1 \implies \begin{cases} a - b\alpha &= a^2 - \alpha \\ 0 &= 2a \end{cases} \implies \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 1 \end{cases}$$

Réciproquement, la fonction polynomiale $P : x \mapsto x$ commute avec $T : P(T(x)) = T(x) = T(P(x))$

🔍 Remarques !

⚡ $P : x \mapsto x$ commute avec toutes les fonctions (polynomiales) !

— a.2. Supposons, en outre $c = 1$

$$P \circ T = T \circ P, d = 0, c = 1 \implies \begin{cases} a - b\alpha + \alpha^2 &= a^2 - \alpha \\ 0 &= 2ab \\ b - 2\alpha &= b^2 + 2a \\ 0 &= 2b \end{cases} \implies \begin{cases} b &= 0 \\ a &= -\alpha \end{cases}$$

Donc $P = T$. Réciproquement, si $P = T$, alors $P \circ T = T \circ T = T \circ P$

— b. Supposons $d = 1$

$$P \circ T = T \circ P, d = 1 \iff \begin{cases} a - b\alpha + c\alpha^2 - \alpha^3 &= a^2 - \alpha \\ 0 &= 2ab \\ b - 2c\alpha + 3\alpha^2 &= b^2 + 2ac \\ 0 &= 2(a + bc) \\ c - 3\alpha &= c^2 + 2b \\ 0 &= 2c \end{cases} \iff \begin{cases} c &= 0 \\ b &= -\frac{3}{2}\alpha \\ a &= 0 \\ \frac{3}{2}\alpha^2 - \alpha^3 &= -\alpha \\ -\frac{3}{2}\alpha + 3\alpha^2 &= \frac{9}{4}\alpha^2 \end{cases}$$

Il faut donc (dernière équation) que $3\alpha^2 - 6\alpha = 0$ i.e. $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2$.

Et on trouve que l'avant-dernière équation est vérifiée pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = 2$

Donc si $\alpha = 0$, on trouve que nécessairement $P : x \mapsto x^3$.

Réciproquement P commute alors avec $T : x \mapsto x^2$.

Et si $\alpha = 2$, on trouve que $P : x \mapsto x^3 - 3x$. Vérifions la réciproque :

$$P(T(x)) = (x^2 - 2)^3 - 3(x^2 - 2) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2 \quad T(P(x)) = (x^3 - 3x)^2 - 2 = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2$$

On trouve finalement :

L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 qui commute avec T est

- si $\alpha = 0$: $\{x \mapsto 1, x \mapsto 0, x \mapsto x, x \mapsto x^2, x \mapsto x^3\}$
- si $\alpha = 2$: $\{x \mapsto x, x \mapsto x^2 - 2, x \mapsto x^3 - 3\}$
- si $\alpha > \frac{1}{4}$: $\{x \mapsto x, x \mapsto x^2 - \alpha\}$
- si $\alpha \leq \frac{1}{4}$ ($\alpha \neq 0$) : $\{x \mapsto \frac{1+\sqrt{1-4\alpha}}{2}, x \mapsto \frac{1-\sqrt{1-4\alpha}}{2}, x \mapsto x, x \mapsto x^2\}$

2. On note R , un polynôme unitaire de degré 2, fixé, quelconque. On considère un polynôme

$P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$, une application polynomiale quelconque de degré $n > 0$ ($a_n \neq 0$) tel que

$$P \circ R = R \circ P.$$

Donc $\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right)^2 - 2 = \sum_{k=0}^n a_k (x^2 - 2)^k$.

On peut identifier ces deux polynômes de degré $2n$:

$$\sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(k, n)} a_i a_{k-i} \right) x^k - 2 = \sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{h=0}^k (-2)^{k-h} \binom{k}{h} x^{2h} \right) = \sum_{h=0}^n \left(\sum_{k=h}^n a_k (-2)^{k-h} \binom{k}{h} \right) x^{2h}$$

On trouve donc, devant le coefficient x^k (ou x^h) :

— $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$, l'équation (E_k)

$$a_{k-n}a_n + a_{k-n+1}a_{n-1} \cdots + a_n a_{k-n} = \left(a_h \binom{h}{h} - 2a_{h+1} \binom{h+1}{h} \cdots + (-2)^{n-h} a_n \binom{n}{h} \right) \times [k \text{ pair}, k = 2h]$$

— $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, l'équation (E'_k)

$$a_0 a_k + a_1 a_{k-1} + \cdots + a_k a_0 = \left(a_h \binom{h}{h} - 2a_{h+1} \binom{h+1}{h} \cdots + (-2)^{n-h} a_n \binom{n}{h} \right) \times [k \text{ pair}, k = 2h]$$

— $k = 0$, $a_0^2 - 2 = \sum_{k=0}^n n(-2)^k a_k \binom{k}{0}$ (équation E_0)

(a) Considérant (E_{2n}) , on trouve $a_n^2 = a_n$, donc $a_n = 1$ (car $a_n \neq 0$).

(b) Puis, considérant le terme de degré juste inférieur E_{2n-1} , on trouve $2a_{n-1}a_n = 0$, donc $a_{n-1} = 0$.

(c) Puis, considérant le terme de degré juste inférieur E_{2n-2} , on trouve $2a_{n-2}a_n + a_{n-1}^2 = na_n + a_{n-1}$, donc une expression unique de $a_{n-2} = 0$.

(...) Et ainsi de suite, de manière rétrograde (pour k de n à 0), on trouve une unique condition définissant a_k , à partir de $a_{k+1}, \dots, a_n$.

Ces derniers étant déterminés de manière unique (ou n'existant pas).

Ainsi, il existe au plus un polynôme de degré donné commutant avec un polynôme unitaire de degré 2 donné.

3. Notons T , le polynôme de degré 2 donné.

Le polynôme $P = T \circ T$ est de degré $2 \times 2 = 4$ et il commute avec $T : T \circ P = T \circ T \circ T = P \circ T$.

D'après la question précédente, il n'en existe qu'un seul.

De même, le polynôme $P = T \circ T \circ T$ est de degré $2 \times 2 \times 2 = 8$ et il commute avec $T : T \circ P = T \circ T \circ T \circ T = P \circ T$.

D'après la question précédente, il n'en existe qu'un seul.

Le polynôme de degré 4 et le polynôme de degré 8 qui commutent avec T (de degré 2, donné) est respectivement $T \circ T$ et $T \circ T \circ T$.

4. On a

$$(Q \circ P) \circ R = Q \circ P \circ R = Q \circ R \circ P = R \circ Q \circ P = R \circ (Q \circ P)$$

$$(P \circ Q) \circ R = P \circ Q \circ R = P \circ R \circ Q = R \circ P \circ Q = R \circ (P \circ Q)$$

Donc $Q \circ P$ et $P \circ Q$ sont deux polynômes qui commutent avec R , unitaire de degré 2,

ils sont tous les deux de degré $\deg P + \deg Q$.

Or il n'existe qu'un seul polynôme de degré fixé qui commute avec R , donc $Q \circ P = P \circ Q$.

Donc, si P et Q commutent avec un polynôme R unitaire de degré 2, alors ils commutent.

5. Définissons par récurrence, à deux termes, la suite polynomiale

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+2} : x \mapsto xP_{n+1}(x) - P_n(x) \quad P_1(x) = x, P_2(x) = x^2 - 2$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}_n : \ll \deg P_n = n, P_n \circ P_2 = P_2 \circ P_n \gg$$

Et montrons ce résultat par récurrence, à deux termes.

— $\mathcal{P}_1$ est vraie (voir les réponses aux questions précédentes)

— $\mathcal{P}_2$ est vraie (voir les réponses aux questions précédentes)

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies.

Puisque $\deg P_{n+1} = n+1$ et $\deg P_n = n$, alors $\deg P_{n+2} = \deg(XP_{n+1}) = 1 + (n+1) = n+2$.

Puis (on note X pour signifier la fonction $x \mapsto x$)

$$P_{n+2} \circ P_2 = P_2 \times P_{n+1} \circ P_2 - P_n \circ P_2 = P_2 \times P_2 \circ P_{n+1} - P_2 \circ P_n = (X^2 - 2) \times (P_{n+1}^2 - 2) - (P_n^2 - 2)$$

Et

$$P_2 \circ P_{n+2} = P_{n+2}^2 - 2 = (X \times P_{n+1} - P_n)^2 - 2 = X^2 P_{n+1}^2 - 2X P_{n+1} P_n + P_n^2 - 2$$

Donc

$$\begin{aligned} P_{n+2} \circ P_2 - P_2 \circ P_{n+2} &= 4 - 2P_{n+1}^2 - 2X^2 + 2 - P_n^2 + 2X P_{n+1} P_n - P_n^2 + 2 \\ &= 8 - 2P_{n+1}^2 - 2P_n^2 - 2X^2 + 2X P_{n+1} P_n \end{aligned}$$

🔗 **Remarques !**

🔗 Là, il faut et il suffit de démontrer que ce polynôme est nul, or $8 - 2X^2$ est constant.

🔗 Donc il faut démontrer que $P_{n+1}^2 + P_n^2 - X P_{n+1} P_n = 4 - X^2$.

🔗 On dit qu'il s'agit d'un invariant. Idéalement, il aurait fallu démontrer ce résultat pour commencer,

🔗 mais cela aurait semblé parachuté. Donc nous le démontrons, maintenant, au coeur de la récurrence...

Notons, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $T_m = P_{m+1}^2 + P_m^2 - XP_{m+1}P_m$.
Alors $T_1 = P_2^2 + P_1^2 - XP_2P_1 = (X^2 - 2)^2 + X^2 - X(X^2 - 2)X = 4 - X^2$.
Puis, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} T_{m+1} &= P_{m+2}^2 + P_{m+1}^2 - XP_{m+2}P_{m+1} = (XP_{m+1} - P_m)^2 + P_{m+1}^2 - X(XP_{m+1} - P_m)P_{m+1} \\ &= X^2P_{m+1}^2 - 2XP_{m+1}P_m + P_m^2 + P_{m+1}^2 - X^2P_{m+1}^2 + XP_mP_{m+1} \\ &= P_{m+1}^2 + P_m^2 - XP_{m+1}P_m = T_m \end{aligned}$$

Donc la suite (T_m) est constante, donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $T_m = T_1 = 4 - X^2$.

Et donc $P_{n+2} \circ P_2 - P_2 \circ P_{n+2} = 8 - 2X^2 - 2T_n = 0$

Par conséquent, $\mathcal{P}_{n+2}$ est également vérifiée.

La récurrence est donc démontrée. D'après la question précédente, pour tout $k, h \in \mathbb{N}^*$, P_k et P_h commutent puisqu'ils commutent tous les deux avec P_2 .

Il existe une suite infinie de polynômes $(P_n)_n$ telle que le degré de P_n soit égal à n ,
 $P_2 = X^2 - 2$ et les termes de cette suite commutent deux à deux.