MPSI 3 - Fermat Le 19.10.20
2020-2021

Devoir surveillé n°1
CORRECTION

Problème. Suite de polynômes

Remarques !
Lorsqu'on écrit une expression du type $3x^3 - 2x^2$ (ou $f(x)$), on parle d'un nombre réel, qui a une certaine valeur (selon celle prise par CE x). On ne parle pas d'une fonction !
Si l'on veut parler d'une fonction, on doit plutôt écrire $x \mapsto 3x^3 - 2x^2$, (ou bien f).
Evidemment pour ce premier devoir, le correcteur ne sera pas très regardant sur cette question.
De même $f(x)'$ n'a aucun sens...

A Suite de fonctions polynomiales

On étudie ici directement la suite de polynômes.

1. Par définition :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (n=0) & p_1 : x \mapsto 1xp_0 + (1-x^2)p_0' = (x^2+x+1) - (x^2) = x+1 \\ (n=1) & p_2 : x \mapsto 2xp_1 + (1-x^2)p_1' = (2x^2+2x+1) - (x^2) = x^2+2x+1 \\ (n=3) & p_3 : x \mapsto 3xp_2 + (1-x^2)p_2' = (3x^3+6x^2+3x) + (1-x^2)(2x+2) = x^3+4x^2+5x+2 \end{array}}$$

/0,5
/0,5
/1

2. On admet que si f et g sont deux fonctions polynomiales :

$$\deg(f \times g) = \deg f + \deg g \text{ et } \deg(f+g) \leqslant \max(\deg f, \deg g)$$

(a) Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$: « $\deg(p_n) \leqslant n$.
— Par définition de p_1, $\mathcal{P}_1$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Alors p_n est de degré inférieur à n et donc $x \mapsto (n+1)xp_n(x)$ de degré inférieur à $1+n$.
De même p_n' est de degré $\deg p_n - 1$, inférieur à $n-1$ et donc $x \mapsto (1-x^2)p_n'(x)$ de degré inférieur à $2 + (n-1) = n+1$.
Par addition, $\deg p_{n+1} \leqslant \max(\deg(x \mapsto (n+1)xp_n), \deg(x \mapsto (1-x^2)p_n'(x))) \leqslant n+1$.
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. /2

$$\boxed{\text{Ainsi pour tout entier } n \geqslant 1,\ \deg(p_n) \leqslant n.}$$

(b) Soyons plus précis, toujours par récurrence, posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}_n$: « $[p_n]_n = 1$ ».
— $p_1 : x \mapsto x+1$ et donc $[p_1]_1 = 1$. $\mathcal{Q}_1$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathcal{Q}_n$ est vraie.
Alors par calcul direct, on a :

$$[p_{n+1}]_{n+1} = [x \mapsto (n+1)xp_n]_{n+1} + [x \mapsto (1-x^2)p_n']_{n+1} = (n+1)[p_n]_n + [p_n']_{n+1} - [p_n']_{n-1}$$

puisque $[x \mapsto x]_k = 0$ si $k \neq 1$ et $[x \mapsto 1-x^2]_k = 0$ si $k \notin \{0,2\}$.
Or $[p_n]_n = 1$ d'après $\mathcal{Q}_n$ et pour tout $h \in \mathbb{N}$, $[p_n']_h = (h+1)[p_n]_{h+1}$
et donc (en $h = n+1$) $[p_n']_{n+1} = (n+2)[p_n]_{n+2} = 0$ ($\deg p_n \leqslant n$)
et (en $h = n-1$) $[p_n']_{n-1} = n[p_n]_n = 1$, toujours d'après $\mathcal{Q}_n$.
Par conséquent :

$$[p_{n+1}]_{n+1} = (n+1)1 - n = 1$$

Ainsi $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.
Par conséquent, la récurrence est démontrée et donc pour tout $n \geqslant 1$, $[p_n]_n = 1$ et donc $\deg p_n \geqslant n$. /2
Avec la question précédente, on a $\deg p_n = n$ (double inégalité). /0,5

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \in \mathbb{N}^*,\ \deg p_n = n \text{ et le coefficient dominant de } p_n \text{ est } [p_n]_n = 1.}$$

(c) On peut appliquer le même genre de raisonnement. Notons, tout d'abord que pour tout $k \in \mathbb{N}$, et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$[p_{n+1}]_k = (n+1)[p_n]_k + [p'_n]_{k+1} - [p'_n]_{k-1}$$

Notons, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_n$: « $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $[p_n]_k \in \mathbb{Z}$ ».

— $p_0 : x \mapsto x+1$, donc $[p_0]_0 = [p_0]_1 = 1$ et pour tout $k \geqslant 2$, $[p_0]_k = 0$.
Ainsi $\mathcal{H}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[p_{n+1}]_k = (n+1)[p_n]_k + [p'_n]_{k+1} - [p'_n]_{k-1}$.
Or $\mathcal{H}_n$ est vraie, donc pour tout k, $[p_n]_k \in \mathbb{Z}$ et par dérivation : $[p'_n]_{k+1}, [p'_n]_{k-1} \in \mathbb{Z}$
L'addition de nombres entiers donne un nombre entier. Donc $[p_{n+1}]_k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. /1,5

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}_n,\ [p_n]_k \in \mathbb{Z}.}$$

3. Etude des racines de p_n.

(a) Le calcul donne $p_3 : x \mapsto x^3 + 4x^2 + 5x + 2$.
On note que -1 est une racine de p_3 : $(-1)^5 + 4(-1)^2 + 5(-1) + 2 = -1 + 4 - 5 + 2 = 0$.
On peut donc factoriser p_3 par $x \mapsto x+1$. On fait une division euclidienne : /1

$$p_3(x) = (x^3 + 4x^2 + 5x + 2) = (x+1)(x^2 + 3x + 2)$$

De nouveau -1 est racine de $x \mapsto x^2 + 3x + 2$. On refait une division euclidienne

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

$$\boxed{p_3(x) = (x+1)^2(x+2)}$$

(b) Notons d'abord l'équivalence :
-1 est une racine de p_n si et seulement si $p_n(-1) = 0$. Puis, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1}(-1) = (n+1)(-1)p_n(-1) + (1-(-1)^2)p'_n(-1) = -(n+1)p_n(-1) + 0 = -(n+1)p_n(-1)$$

On reconnait la suite factorielle :

$$\begin{aligned} p_{n+1}(-1) &= -(n+1)p_n(-1) = (n+1)np_{n-1}(-1) = \dots \\ &= (-1)^k \underbrace{(n+1)_k}_{\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}\ \text{suite factorielle décroissante}} p_{n+1-k}(-1) \\ &= \dots = (-1)^{n+1}(n+1)!p_0(-1) \end{aligned}$$

Or $p_0(-1) = 0$, donc $p_{n+1}(-1) = 0$, pour tout entier n. /2,5

$$\boxed{\text{Donc pour tout entier } n,\ -1 \text{ est une racine de } p_n.}$$

Remarques !
Evidemment, une démonstration par récurrence est possible ici, également...

(c) Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} p_4(x) &= 4x(x+1)^2(x+2) + (1-x)(1+x)[2(x+1)(x+2) + (x+1)^2] \\ &= [(x+1)^2][4x(x+2) + 2(1-x)(x+2) + (1-x)(1+x)] \\ &= (x+1)^2[x^2 + 6x + 5] = (x+1)^3(x+5) \end{aligned}$$

/2

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad p_4(x) = (x+1)^3(x+5)}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé. On note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

(a) On a alors, p_n dérivable et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad p'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

et donc pour tout réel x

$$
\begin{aligned}
&(n+1)xp_n(x)+(1-x^2)p_n'(x)\\
&\quad = \sum_{k=0}^{n}(n+1)a_kx^{k+1}+\sum_{k=1}^{n}ka_kx^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}ka_kx^{k+1}\\
&\quad = \overbrace{\sum_{h=1}^{n+1}(n+1)a_{h-1}x^h}^{h=k+1\Leftrightarrow k=h-1}+\overbrace{\sum_{k=0}^{n-1}ka_{h+1}x^h}^{h=k-1}-\overbrace{\sum_{h=2}^{n+1}(h-1)a_{h-1}x^h}^{h=k+1}\\
&\quad = \left(\sum_{h=1}^{n-1}(n+1)a_{h-1}x^h+(n+1)a_{n-1}x^n+(n+1)a_nx^{n+1}\right)+\left(a_1+\sum_{h=1}^{n-1}(h+1)a_{h+1}x^h\right)\\
&\qquad\quad -\left(\sum_{h=1}^{n-1}(h-1)a_{h-1}x^h+(n-1)a_{n-1}x^n+na_nx^{n+1}\right)\\
&\quad = a_1+\sum_{h=1}^{n-1}((n-h+2)a_{h-1}+(h+1)a_{h+1})x^h+2a_{n-1}x^n+a_nx^{n+1}
\end{aligned}
$$

Pour tout réel x, /3

$$\boxed{(n+1)xp_n(x)+(1-x^2)p_n'(x)=a_1+\sum_{h=1}^{n-1}((n-h+2)a_{h-1}+(h+1)a_{h+1})x^h+2a_{n-1}x^n+a_nx^{n+1}}$$

(b) Or il s'agit du polynôme p_{n+1}, on peut donc identifier ($a_h=[p_n]_h$) :

$$
[p_{n+1}]_k=\left\{\begin{array}{cl}
[p_n]_1 & \text{si } k=0\\
(n-k+2)[p_n]_{k-1}+(k+1)[p_n]_{k+1} & \text{si } k\in\mathbb{N}_{n-1}\\
2[p_n]_{n-1} & \text{si } k=n\\
[p_n]_n & \text{si } k=n+1
\end{array}\right.
$$

A condition de prendre $[p_n]_k=0$ si $k<0$ ou si $k>n$, on trouve bien une unique expression : /1,5

$$\boxed{\forall\ k\in[\![0,n+1]\!],\qquad [p_{n+1}]_k=(n-k+2)[p_n]_{k-1}+(k+1)[p_n]_{k+1}}$$

(c) On a trouvé $p_6 : x\mapsto 61+272x+479x^2+416x^3+179x^4+32x^5+x^6$.
Si on note $p_5(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$, on a alors le système ($n=5$) :

$$
\left\{\begin{array}{ccccccll}
 & a_1 & & & & & =61 & (h=0)\\
6a_0 & & +2a_2 & & & & =272 & (h=1)\\
 & 5a_1 & & +3a_3 & & & =479 & (h=2)\\
 & & 4a_2 & & +4a_4 & & =416 & (h=3)\\
 & & & 3a_3 & & +5a_5 & =179 & (h=4)\\
 & & & & 2a_4 & & =32 & (h=5)\\
 & & & & & a_5 & =1 & (h=6)
\end{array}\right.
$$

$$
\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{cccccc|c}
 & a_1 & & & & =61 & \\
6a_0 & & +2a_2 & & & =272 & \\
 & 5a_1 & & +3a_3 & & =479 & \\
 & & 4a_2 & & +4a_4 & =416 & \\
 & & & a_3 & & =58 & \frac{1}{3}(L_5-5L_7)\\
 & & & & a_4 & =16 & \frac{1}{2}L_6\\
 & & & & a_5 & =1 &
\end{array}\right.
\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{cc|c}
a_1 & =61 & \\
a_0 & 16 & \frac{1}{6}(L_2-\frac{1}{2}L_4+2L_6)\\
a_1 & =61 & \frac{1}{5}(L_3-3L_5)\\
a_2 & =88 & \frac{1}{4}(L_4-4L_6)\\
a_3 & =58 & \\
a_4 & =16 & \\
a_5 & =1 &
\end{array}\right.
$$

/2

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R},\ p_5(x)=16+61x+88x^2+58x^3+16x^4+x^5.}$$

B. Introduction d'une fonction auxiliaire

On note I, l'intervalle $I=\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et h, la fonction auxiliaire infiniment dérivable sur I :

$$h : x\mapsto\frac{\sin x+1}{\cos x}$$

1. *Il s'agit de calcul classique de terminale. Espérons que les étudiants n'ont pas tout oublié...*
   h est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur I, elle est donc de classe

$\mathcal{C}^2$ (au moins et $\mathcal{C}^\infty$ en fait).
Et pour tout $x \in I$,

$$h'(x) = \frac{\cos x \cos x + \sin x(\sin x + 1)}{\cos^2 x} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin x}{\cos^2(x)} = \frac{\sin x + 1}{\cos^2(x)}$$

$$h''(x) = \frac{\cos x \cos^2 x + 2\sin x \cos x(\sin x + 1)}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x + 2\sin x)}{\cos^3(x)} = \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 1}{\cos^3(x)}$$

/2

$$\boxed{h'(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos^2(x)} \left(= \frac{p_1(\sin x)}{\cos^2(x)}\right) \quad \text{et} \quad h''(x) = \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 1}{\cos^3(x)} \left(= \frac{p_2(\sin x)}{\cos^3(x)}\right)}$$

2. Soit $x \in I$,

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)$$

$$\sin x + 1 = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)^2$$

Comme $x \in I$, $\frac{x}{2} \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, donc $\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} > 0$, on peut simplifier : /2

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in I,\ h(x) = \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}.}$$

3. Nous raisonnons par récurrence.
Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $\forall\, x \in I, \quad h^{(n)}(x) = \dfrac{p_n(x)}{\cos^{n+1}(x)}$ ».
(Nous avons vu que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en première question).
— On a clairement :

$$h(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{p_0(\sin x)}{\cos^{0+1}(x)}$$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, donc $h^{(n)} : x \mapsto \dfrac{p_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$.
$h^{(n)}$ est alors dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(x) &= \frac{\cos x \times p_n'(\sin x) \times \cos^{n+1}(x) - (n+1)(-\sin(x))\cos^n(x) \times p_n(\sin x)}{(\cos^{n+1}(x))^2} \\ &= \frac{\cos^2 x \times p_n'(\sin x) + (n+1)\sin(x) p_n(\sin x)}{\cos^{2n+2-n}(x)} = \frac{(1 - \sin^2 x) \times p_n'(\sin x) + (n+1)\sin(x) p_n(\sin x)}{\cos^{n+2}(x)} \end{aligned}$$

/2

On reconnait $p_{n+1}(\sin x)$ (composition de p_{n+1} avec $\sin x$).
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. /1

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a} : \forall\, x \in I, \quad h^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{\cos^{n+1}(x)}.}$$

4. On rappelle que la suite $(\alpha_n)_n$ a été définie dans le propos introductif.
(a) Soit $x \in I$, ce calcul a déjà était fait (en partie) :

$$1 + (h(x))^2 = \frac{\cos^2 + (\sin x + 1)^2}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x + 1}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x + 2}{\cos^2 x} = 2h'(x)$$

/1,5

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in I,\ 2h'(x) = 1 + (h(x))^2.}$$

(b) En $x = 0$:

$$h'(0) = \frac{p_1(\sin 0)}{\cos^2(0)} = \frac{p_1(0)}{1} = \alpha_1 \qquad h(0) = \frac{p_0(\sin 0)}{\cos(0)} = \alpha_0$$

Avec la relation précédente : /1

$$\boxed{2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1}$$

(c) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}_n$: « $2h^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)} h^{(n-k)}$ ».

— Dérivons la relation $2h' = 1 + h^2$:

$$2h^{(1+1)} = 2h'' = 0 + 2hh' = \binom{0}{1} h^{(0)}h^{(1)} + \binom{1}{1} h^{(1)}h^{(0)}$$

Ainsi $\mathcal{Q}_1$ est vraie. /1

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{Q}_n$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}
2h^{(n+2)} &= \left(2h^{(n+1)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}h^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k+1)}h^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}h^{(n-k+1)} \\
&= \overbrace{\sum_{r=1}^{n+1} \binom{n}{r-1} h^{(r)}h^{(n+1-r)}}^{r=k+1 \Leftrightarrow k=r-1} + \overbrace{\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} h^{(r)}h^{(n-r+1)}}^{r=k} \\
&= \underbrace{\binom{n}{n} h^{(n+1)}h^{(0)}}_{r=n+1} + \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r-1} h^{(r)}h^{(n+1-r)} + \sum_{r=1}^{n+1} \binom{n}{r} h^{(r)}h^{(n+1-r)} + \underbrace{\binom{n}{0} h^{(0)}h^{(n+1)}}_{r=0} \\
&= h^{(n+1)}h^{(0)} + \sum_{r=1}^{n} \left(\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}\right) h^{(r)}h^{(n+1-r)} + \binom{n}{0} h^{(0)}h^{(n+1)} \\
&= \binom{n+1}{n+1} h^{(n+1)}h^{(0)} + \sum_{r=1}^{n} \binom{n+1}{r} h^{(r)}h^{(n+1-r)} + \binom{n+1}{0} h^{(0)}h^{(n+1)}
\end{aligned}$$

car $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$ et d'après la relation de Pascal : $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$.

On trouve donc : $2h^{(n+2)} = \displaystyle\sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} h^{(r)}h^{(n+1-r)}$.

Ainsi $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie. /3,5

Donc pour tout $n \geqslant 1$, $2h^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}h^{(n-k)}$.

Par ailleurs, on sait que $\alpha_n = p_n(0) = \cos^{n+1}(0) \times h^{(n)}(0) = 1h^{(n)}(0)$.
Donc en $x = 0$:

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}}$$

Remarques !

Par la suite ici, on pourra exploiter la formule de Leibniz : $(f \times g)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)}$.

En dérivant n fois la relation : $2h'(x) = 1 + (h(x))^2$:

$$2h^{(n+1)}(x) = 0 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x)h^{(n-k)}(x)$$

C. Permutations alternantes

On note P.A.M. pour dire permutation alternante montante et P.A.D. pour une permutation descendante.

1. Dénombrement des permutations alternantes

   (a) Pour démontrer les résultats annoncés, on peut par exemple écrire toutes les permutations et compter simplement celles qui sont montantes.

   Pour $n = 2$, il y a une P.A.M. : $(1, 2)$ (l'autre $(2, 1)$ n'est pas montante). /0,5

   Pour $n = 3$, il y a 6 permutations : $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ et $(3, 2, 1)$.
   Deux permutations sont des P.A.M. : $(1, 3, 2)$ et $(2, 3, 1)$. /1

   Pour $n = 4$, il y a 24 permutations. On peut les écrire et souligner celles qui sont montantes : /1,5
   $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 2, 4, 3)$, $\overline{(1, 3, 2, 4)}$, $(1, 3, 4, 2)$, $\overline{(1, 4, 2, 3)}$, $(1, 4, 3, 2)$.
   $(2, 1, 3, 4)$, $(2, 1, 4, 3)$, $\overline{(2, 3, 1, 4)}$, $(2, 3, 4, 1)$, $\overline{(2, 4, 1, 3)}$, $(2, 4, 3, 1)$.
   $(3, 1, 2, 4)$, $(3, 1, 4, 2)$, $\overline{(3, 2, 1, 4)}$, $(3, 2, 4, 1)$, $\overline{(3, 4, 1, 2)}$, $(3, 4, 2, 1)$.
   $(4, 1, 2, 3)$, $(4, 1, 3, 2)$, $(4, 2, 1, 3)$, $(4, 2, 3, 1)$, $\overline{(4, 3, 1, 2)}$, $(4, 3, 2, 1)$.
   Cinq permutations sont des P.A.M.

(b)

Piste de recherche...

Pour ce genre de question, il n'y a qu'une bonne méthode : montrer qu'on passe d'un problème (permutations montantes) à l'autre (permutations descendantes) avec une application bijective.
Ici, on note $\Phi_n : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$, $k \mapsto n+1-k$, elle est décroissante et permet de passer d'une liste montantes à une listes descendantes.
Par exemple pour $n = 6$, à la permutation montante : $(2,5,3,6,1,4)$, Φ_6 associe la permutation $(\Phi_6(2), \Phi_6(5), \Phi_6(3), \Phi_6(6), \Phi_6(1), \Phi_6(4)) = (5,2,4,1,6,3)$ qui est bien descendante

On fixe donc n et on considère $\Phi_n : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$, $k \mapsto n+1-k$.
Elle est bijective : chaque nombre de $\mathbb{N}_n$ a un unique antécédent par Φ_n,
le nombre $n+1-k$, car $\Phi_n(n+1-k) = n+1-(n+1-k)) = k$.
Si $\ell = (x_1, x_2, \dots x_n)$ est une liste permutative de $\mathbb{N}_n$, on note $\Phi_n(\ell) = (\Phi_n(x_1), \Phi_n(x_2), \dots \Phi_n(x_n))$.
On a les équivalences :

$$\begin{array}{rcc} \ell \text{ est P.A.M.} & \Longleftrightarrow & \forall\, i \in [\![2,n]\!], (-1)^i(x_i - x_{i-1}) > 0 \\ & \Longleftrightarrow & \forall\, i \in [\![2,n]\!], (-1)^i((n+1-x_i) - (n+1-x_{i-1})) > 0 \\ & \Longleftrightarrow & \forall\, i \in [\![2,n]\!], (-1)^i(\Phi_n(x_i) - \Phi_n(x_{i-1})) < 0 \\ & \Longleftrightarrow & \Phi_n(\ell) \text{ est P.A.D.} \end{array}$$

A toute liste croissante, on associe une seule liste décroissante. Et réciproquement. /1,5

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 2, \text{ que le nombre de permutations alternantes montantes est égal au nombre de permutations alternantes descendantes.}}$$

Si $n \geqslant 2$, on note β_n le nombre de permutations alternantes montantes de $[\![1,n]\!]$ et on convient que $\beta_0 = \beta_1 = 1$.

(c)

Remarques !

Ce qu'on montre ici, c'est que le nombre β_k ne dépend pas du fait qu'on prenne exactement les k nombres de 1 à k, où k autres nombres que l'on peut ordonner.

L'ensemble A contient k éléments pris dans $[![1,n]\!]$ et que l'on peut ordonner $x_1 < x_2 < \dots x_k$.
On définit ainsi une fonction $\psi : \mathbb{N}_k \to A$, $i \mapsto x_i$.
On a alors l'équivalence :

$$(a_1, \dots a_k) \text{ est une P.A.M. de } \mathbb{N}_k \Longleftrightarrow (\psi(a_1), \dots \psi(a_k)) \text{ est une liste A.M de } A$$

/1

$$\boxed{\text{Le nombre de ces listes extraites de } A \text{ qui sont alternantes montantes est égal à } \beta_k.}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$, on cherche à dénombrer les P.A.M de $\mathbb{N}_{n+1}$, noté β_{n+1}.
On va séparer ces P.A.M. en sous-ensemble selon la valeur du position occupée par $n+1$ dans la liste, position âramétrée par $k+1$ par la suite.
Notons que le nombre $n+1$ étant le plus grand de la liste,
il est nécessaire qu'il se trouve dans une position paire car il est plus grand que ces deux voisins (les nombres en position k et $k+2$) pour avoir une P.A.M..
Plutôt que de diviser par 2, nous allons calculer ensemble le nombre de $P.A.M.$ et de $P.A.D$, puisqu'il s'agit du même nombre.
Ainsi, on note pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P_k = \{\sigma \text{ P.A. de } \mathbb{N}_{n+1} \text{ et tel que } \sigma(k+1) = n+1\}$.
On a la réunion disjointe :

$$\{\sigma, \text{ P.A.M. de } \mathbb{N}_{n+1}\} \biguplus \{\sigma, \text{ P.A.D. de } \mathbb{N}_{n+1}\} = \biguplus_{k=0}^{n} P_k$$

En passant au cardinal :

$$2\beta_{n+1} = \text{card}\{\sigma, \text{ P.A.M. de } \mathbb{N}_{n+1}\} + \text{card}\{\sigma, \text{ P.A.D. de } \mathbb{N}_{n+1}\} = \sum_{k=0}^{n} \text{card}(P_k)$$

Reste à calculer le cardinal de P_k, ensemble des PAM de $\mathbb{N}_{n+1}$ dont le terme en position $k+1$ est $n+1$.
Une telle PAM se caractérise (bijectivement) par :

— le ≪ choix ≫des k éléments de $\mathbb{N}_n$ qui se trouve avant la position $k+1$.
Il y a $\binom{n}{k}$ possiblités.

— Supposons que $k+1$ est pair (resp. impair). Alors la liste σ nécessairement une P.A.M. (resp. P.A.D.) et donc la liste des k premiers termes est également une P.A.M. (resp. P.A.D.).
Il a donc β_k possibilités pour créer une tette liste.

— Quel que soit la parité de k, la liste des termes en position $k+2$, $k+3$, $\ldots n+1$ pour σ est nécessairement une P.A.M.
Elle est prise dans un ensemble à $(n+1)-(k+2)+1 = n-k$ éléments.
Il a donc β_{n-k} possibilités pour créer une tette liste.

Les opportunités se multiplient dans ces trois situations donc $\text{card}(P_k) = \dbinom{n}{k}\beta_k\beta_{n-k}$. /2

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 1,\ 2\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\beta_k\beta_{n-k}.}$$

(e) On démontre ce résultat par une récurrence forte (explicite ou implicite).
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: ≪ pour tout $k \leqslant n$, $\beta_k = \alpha_k$ ≫

— On sait que $\beta_0 = 1 = \alpha_0$.
Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On veut démontrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Constatons donc, pour commencer, que pour tout $k \leqslant n$, $\beta_k = \alpha_k$.
Il reste donc à démontrer le cas $k = n+1$. Or

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\beta_k\beta_{n-k} \underbrace{=}_{\text{d'après } \mathcal{P}_n} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\alpha_{n-k} \underbrace{=}_{\text{d'après } B.4.(c)} \alpha_{n+1}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. /2

$$\boxed{\text{Ainsi pour tout } n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \alpha_n}$$

Remarques !

La récurrence forte implicite consiste ici à noter $\mathcal{Q}_n$: ≪ $\beta_n = \alpha_n$ ≫.
Puis de démontrer $\mathcal{Q}_0$ et les implications : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, \ldots \mathcal{Q}_n) \Longrightarrow \mathcal{Q}_{n+1}$.

2. Permutations aléatoires.
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on munit l'ensemble Ω_n des permutations de $[\![1, n]\!]$ de la probabilité uniforme. On note π_n la probabilité qu'une permutation dans Ω_n soit alternante montante. On convient de plus que $\pi_0 = \pi_1 = 1$.

(a) On sait que $\pi_n = \dfrac{\beta_n}{n!}$, puisque le nombre de cas favorables est β_n.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, /1

$$\boxed{\pi_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{2(n+1)n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\beta_k\beta_{n-k} = \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\pi_k\pi_{n-k}}$$

(b) On montre alors par une récurrence forte que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\pi_k \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}^{k-1}}$.
Notons, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, cette propriété $\mathcal{H}_k$.

— $\mathcal{H}_0$ est vraie car $\pi_0 = 1 \leqslant \sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}^{-1}}$

— $\mathcal{H}_1$ est vraie car $\pi_1 = 1 \leqslant 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}^{0}}$
(nécessaire, car la formule utilisée par récurrence est vraie que pour $n \geqslant 1$)

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1 \ldots \mathcal{H}_n$ sont vraies.
On a alors

$$\pi_{n+1} \leqslant \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{2}^{k-1}}\frac{1}{\sqrt{2}^{n-k-1}} = \frac{1}{2(n+1)}\frac{1}{\sqrt{2}^{n-2}}\sum_{k=0}^{n}1 = \frac{\sqrt{2}^2}{2(n+1)\sqrt{2}^n}(n+1) = \frac{1}{\sqrt{2}^n}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie

/1+0,5

$$\boxed{\forall\ k \in \mathbb{N}, \pi_k \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}^{k-1}} \text{ et donc } \lim \pi_k = 0}$$

On définit une variable aléatoire M_n sur Ω_n en associant à toute permutation $\sigma \in \Omega_n$ l'entier $M_n(\sigma)$ tel que :

— $M_n(\sigma) = 2$ si $\sigma(1) > \sigma(2)$;

— $M_n(\sigma) = 3$ si $\sigma(1) < \sigma(2)$ mais $\sigma(2) < \sigma(3)$;

— $M_n(\sigma) = 4$ si $\sigma(1) < \sigma(2)$, $\sigma(2) > \sigma(3)$ mais $\sigma(3) > \sigma(4)$;

— ...

— $M_n(\sigma) = n + 1$ si σ est alternante montante.

En d'autres termes, $M_n(\sigma) = k + 1$ où k est le plus grand entier tel que $(\sigma(1), ..., \sigma(k))$ soit alternante montante. On note $\mathbf{E}(M_n)$ l'espérance de M_n.

(c) Soit $i \in [\![0, n]\!]$.

$$\sigma \in [M_n > i] \iff M_n(\sigma) > i \iff (\sigma(1), \sigma(2), \ldots \sigma(i))\text{A.C.}$$

Pour une telle situation, il y a autant de cas favorables que :

— de choix de i éléments dans $\mathbb{N}_n$: $\binom{n}{i}$ possibilités

— et parmi ceux-ci les cas AM : β_i cas favorables

— puis, toutes les permutations des $n - i$ éléments non choisis, laisse les cas favorables : $(n - i)!$ possibilités.

On a donc /1

$$\boxed{\mathbf{P}(M_n > i) = \frac{\binom{n}{i}\beta_i(n-i)!}{n!} = \frac{\beta_i}{i!} = \pi_i}$$

(d) M_n est une variable aléatoire à valeurs entières positives (et majorée par n).

On exploite le fait que $[M_n > k - 1] = [M_n = k] \uplus [M_n > k]$,

donc $\mathbf{P}(M_n > k - 1) = \mathbf{P}(M_n = k) + \mathbf{P}(M_n > k)$,

donc $\mathbf{P}(M_n = k) = \mathbf{P}(M_n > k - 1) - \mathbf{P}(M_n > k)$.

On a le résultat classique suivant :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(M_n) \quad &= \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbf{P}(M_n = k) = \sum_{k=2}^{n+1} k\left(\mathbf{P}(M_n > k-1) - \mathbf{P}(M_n > k)\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbf{P}(M_n > k-1) - \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbf{P}(M_n > k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (i+1)\mathbf{P}(M_n > i) - \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbf{P}(M_n > k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(M_n > i) + \sum_{i=1}^{n} i\mathbf{P}(M_n > i) - \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbf{P}(M_n > k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(M_n > i) + \underbrace{\mathbf{P}(M_n > 1)}_{=1} - (n+1)\underbrace{\mathbf{P}(M_n > n+1)}_{=0} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \pi_i = \sum_{i=0}^{n} \pi_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{\beta_i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i}{i!} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{p_i(0)}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{h^{(i)}(0)}{i!}
\end{aligned}$$

/1,5

En passant à la limite (**nous verrons plus tard**) que

/0,5

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(M_n) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} 1^i = \frac{\sin(1) + 1}{\cos(1)}}$$