Devoir à la maison n°2

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice 1

1. Démontrer géométriquement et algébriquement la formule suivante (*Théorème de l'angle au centre*) :
$$\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \qquad \arg z = 2\arctan \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z| + \operatorname{Re}(z)}$$

2. (a) Démontrer l'équivalence :
$$\left|\frac{1+ix}{1-ix}\right| = 1 \iff x \in \mathbb{R}$$
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que les racines de l'équation $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$ sont les nombres $x_k = \tan \frac{\alpha+k\pi}{n}$ pour $k \in \{0, 1, \dots n-1\}$ et $\alpha = \arctan a$

(Ces deux questions 1. et 2. sont indépendantes)

Exercice 2

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $x > 0$:
$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

1. Quelles sont les limites, pour $n \to +\infty$ de $f_n(0)$ et de $f_n(n)$?
2. Que vaut $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$?
3. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1 + \frac{x}{n})$, pour tout $x > 0$.
4. Quelles sont les limites, pour $n \to +\infty$ de $f_n(x)$, de $f_n(\sqrt{n})$ et de $f_n(\frac{1}{\sqrt{n}})$?

Exercice 3

On considère $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

1. Continuité de f
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
   (b) On rappelle que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.
   Quelles inégalités comparables avons-nous pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$?
   (c) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   Si besoin, par la suite, on notera $F = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, la primitive de f qui s'annule en 0.
2. On note $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{F(x)}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.
   (a) Montrer que h est paire.
   (b) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$,
$$h'(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{1}{x^2}F(x)$$
   (c) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$,
$$\frac{\sin x}{x} \leqslant h(x) \leqslant 1$$

(d) En déduire que h admet une limite en 0. Quelle est sa valeur ?

3. Variations de h.
   Déduire également de la partie précédente que h est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
4. Dérivabilité en 0.
   Il faut faire l'étude de
$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$$
   pour savoir si h (prolongé par la valeur en 1 en 0) est bien dérivable en 0.

   (a) Montrer qu'il existe une fonction $\epsilon : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, continue en 0 telle que
$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + x^3\epsilon(x)$$
   (b) Montrer que h est dérivable en 0 et que $h'(0) = 0$.