MPSI 3 - Fermat Le 10.10.20
2020-2021

Devoir surveillé n°2

Durée de l'épreuve : 3 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème de deux parties.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Problème. Modèles démographiques et épidémiologiques

Dans ce problème, nous étudions des modélisations mathématiques à des problèmes démographiques ou de propagation de maladie.

A. Modèle de Verhulst (1838) /25

On considère une population d'individus.
On note $N(t)$ le nombre d'individus dans la population à l'instant t ($t \in [0;+\infty[$).
On note $N_0 = N(0)$ la taille de la population à l'instant initial $t=0$. On suppose $N_0 > 0$.
Dans le modèle de Verhulst la fonction N est dérivable sur $[0;+\infty[$ et est solution de l'équation différentielle

$$y' = ry(1 - \frac{1}{K}y) \qquad (E)$$

où $r > 0$ et $K > 0$ sont deux paramètres dont on donnera un sens « physique » par la suite.

1. Une première fonction intermédiaire.
   On suppose que N est une solution de (E). On lui associe $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto N(t)e^{-rt}$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $[0;+\infty[$.
   (b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' = -\frac{r}{K}N(t)y$.
   (c) En déduire qu'il existe une fonction g définie sur $[0;+\infty[$ et un réel $C > 0$ tels que :
   $$\forall\, t \geqslant 0, \qquad f(t) = Ce^{g(t)}$$
   on exprimera g et C en fonction (d'une primitive) de N et des paramètres N_0, r et K.
2. Une seconde fonction intermédiaire. Soit $h : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{N(t)}$.
   (a) Justifier que la fonction h est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.
   (b) Montrer que h est solution de l'équation différentielle linéaire (E_2) : $y' = -ry + \frac{r}{K}$.
   (c) Résoudre l'équation différentielle (E_2).
   (d) En déduire que la fonction N est définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, par
   $$N(t) = \frac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)}$$

Dans la suite, on admet que la fonction N est définie sur $\mathbb{R}_+$ par $N(t) = \dfrac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)}$.
On rappelle que $N_0 > 0$.

3. Etude de la fonction N.
   (a) Déterminer $\lim_{t\to+\infty} N(t)$.
   En déduire la raison pour laquelle Verhulst appelle la constante K : « capacité du milieu ».
   (b) Étudier les variations (strictes) de N sur $[0;+\infty[$.
   On distinguera plusieurs cas en fonction des paramètres du problème

4. On suppose que $N_0 < \frac{1}{2}K$.
   (a) Montrer que N est de classe $\mathcal{C}^2$ et que pour tout $t \geqslant 0$

$$N''(t) = r^2 N(t) \times \left(1 - \frac{1}{K}N\right)\left(1 - \frac{2}{K}N\right)$$

   (b) En déduire qu'il existe un unique réel t_0 dans l'intervalle $]0; +\infty[$ tel que $N''(t_0) = 0$.
   (c) On dit qu'une fonction φ, de classe $\mathcal{C}^2$ est
      convexe sur un intervalle J, si pour tout $t \in J$, $\varphi''(t) > 0$.
      concave sur un intervalle J si pour tout $t \in J$, $\varphi''(t) < 0$.
   Etudier la convexité/concavité de N sur (les intervalles de) $\mathbb{R}$.
   (d) VERHULST considérait que « *la date à laquelle la croissance de la population commence à ralentir correspond au moment où la taille de la population atteint la moitié de sa valeur limite.* »
   En considérant t_0 et $N(t_0)$, justifier l'affirmation de VERHULST.
   (e) Tracer la courbe représentant N en fonction de t, pour $t \geqslant 0$. On prendra $K = 4 \times N_0$ et $t_0 = 3$cm. On veut voir sur la courbe :
   — la tangente en $t = 0$.
   — la tangente en $t = t_0$.
   — l'asymptote pour $t \to +\infty$

5. On suppose toujours que $0 < N_0 < \frac{K}{2}$.
   VERHULST appelait *deuxième âge [de la croissance de la population]* la période se situant entre les instants 0 et t_0, et *troisième âge* la période se situant entre les instants t_0 et $2t_0$.
   (a) Montrer que $\exp(rt_0) = \dfrac{K}{N_0} - 1$.
   (b) Donner une primitive de N sur $[0, +\infty[$.
   (c) On appelle valeur moyenne d'une fonction φ continue sur un intervalle $[a; b]$, le nombre

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t$$

   Montrer que la valeur moyenne de N sur la période s'étendant sur les *deuxième* et *troisième* âges selon VERHULST (i.e. entre $t = 0$ et $t = 2t_0$) est égale à $\dfrac{K}{2}$.
   (d) On note $N_1 = N(t_0)$. Montrer que $r = \dfrac{1}{t_0} \ln \dfrac{\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{N_1} - \frac{1}{K}}$.

B. Modèle SIR de Kermack et McKendrick (1926) /35

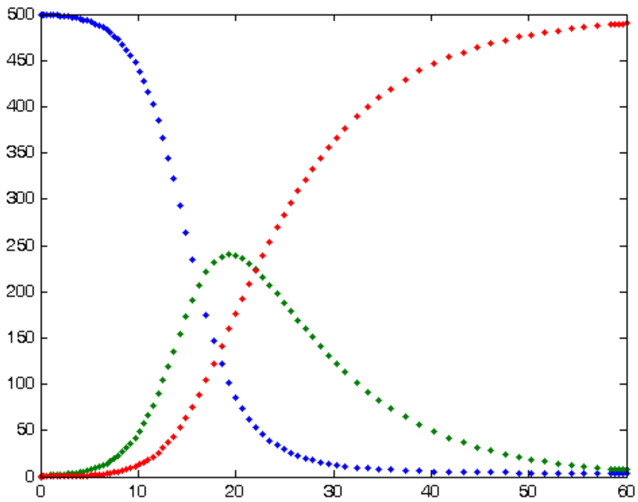
Dans le même esprit, Kermack et McKendrick proposent un modèle d'évolution d'une épidémie en 1926. C'est e modèle suivant appelé aujourd'hui modèle SIR et à la base des premières modèles d'étude de l'impact de la covid-19.

$$\left\{\begin{array}{rl} S(0) & = N_0 - I_0 \\ I(0) & = I_0 \\ R(0) & = 0, \\ S'(t) & = -aS(t) \times I(t) \\ I'(t) & = aS(t) \times I(t) - bI(t) \\ R'(t) & = bI(t) \end{array}\right.$$

où

- $S(t)$ est le nombre d'individus non encore infectés donc susceptibles d'être infectés à l'instant t,
- $I(t)$ est le nombre de personnes infectés à l'instant t,
- $R(t)$ est le nombre d'individus immunisés à l'instant t,
- a est la probabilité d'être infecté par rencontre d'un susceptible et d'un infecté ($\underline{a > 0}$)
- b est la probabilité de guérison pour une personne infecté (à chaque instant) ($\underline{b > 0}$)
- N_0 est le nombre d'individus à l'instant $t = 0$ et I_0, le nombre d'individus infectés.

On notera là encore que dans ce modèle, les nombres a et b sont considérés constants. On suppose que ce modèle admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ entier, notée justement (S, I, R).
En utilisant des logiciels de calcul numérique, on peut trouver les graphiques suivants :



Le but de cette partie est de démontrer ce que l'on voit sur ces représentations graphiques.

1. On note, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$. Montrer que N est constante (on donnera sa valeur).
2. Etude des variations de S et R. Existence de limites pour $t \to +\infty$.
   (a) Pourquoi I admet une primitive sur $\mathbb{R}_+$? On la note $\hat{I}$.
   En exploitant $\hat{I}$, résoudre la première des équations différentielles et en déduire que $S(t) > 0$, pour tout $t \geqslant 0$.
   (b) De même, montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $I(t) > 0$.
   (c) Montrer que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et (*) admet une limite en $+\infty$. Montrer de même que R puis I admettent également une limite pour $t \to +\infty$.
   On notera S_∞, R_∞ et I_∞ ces trois limites, respectivement.
   (d) Montrer que $I_\infty = 0$. *On pourra faire un raisonnement par l'absurde.*
   (e) Montrer que l'application $L : t \mapsto \ln S$ est dérivable, puis qu'il existe une constant C à déterminer telle que
   $$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \qquad L(t) = C - \frac{a}{b} S(t)$$
   (f) En déduire que $\ln \dfrac{S_\infty}{S(0)} = \dfrac{a}{b}(S_\infty - N)$
   (g) Puis montrer l'encadrement : $S_0 \exp\left(-\frac{b}{a} N_0\right) \leqslant S_\infty \leqslant S_0$.
   En déduire que $S_\infty > 0$.

3. On cherche une valeur approchée du temps T du pic épidémique.
   (a) Si I présente un maximum local en T alors $S(T) = \frac{b}{a}$.
   On rappelle que la fonction S est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\frac{b}{a} \in [S(0), S_\infty]$.
   Montrer que I présente un maximum local en T tel que $S(T) = \frac{b}{a}$.
   On note $S^{-1} : [S_\infty; S(0)] \to \mathbb{R}_+$, la fonction réciproque de S.
   (b) Montrer que
$$T - 0 = \int_{S(0)}^{\frac{b}{a}} (S^{-1})'(u)\mathrm{d}u$$
   (c) On admet que $S'(t) = -aS(t)\big(N - S(t) + \frac{b}{a}\ln(\frac{S(t)}{S(0)})\big)$.
   En déduire
$$T = \int_{S(0)}^{\frac{b}{a}} \frac{\mathrm{d}u}{-au\big(N - u + \frac{b}{a}\ln(\frac{u}{S(0)})\big)}$$
   (d) On suppose que $I_0 = 1$. En faisant un changement de variable, montrer que
$$T = \int_{\frac{b}{Na}}^{1-\frac{1}{N}} \frac{\mathrm{d}s}{aNs\big(1 - s + \frac{b}{aN}\ln(\frac{s}{1-\frac{1}{N}})\big)}$$
   (e) Montrer : $\forall\, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \ln(1-x) \geqslant -2x$
   (f) On rappelle également que pour tout $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.
   Montrer que
$$T \geqslant \frac{1}{aN}\int_{\frac{b}{Na}}^{1-\frac{1}{N}} \frac{\mathrm{d}s}{s\left(1 - s + \frac{b}{aN}(s-1) + \frac{2b}{aN^2}\right)}$$
   (g) On note $U = 1 + \frac{2b}{aN^2} - \frac{b}{aN}$ et $V = 1 - \frac{b}{aN}$. Montrer que :
$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}s}{s(U - Vs)} = \frac{1}{U}\ln\left|\frac{\beta(U - V\alpha)}{\alpha(U - V\beta)}\right|$$
   (h) En déduire que $T \geqslant \dfrac{\ln N}{aN - b + 2\frac{b}{N}} + \dfrac{1}{aN - b + 2\frac{b}{N}}\ln\left(\dfrac{a(N-1)}{b}\dfrac{1 - \frac{b}{aN} + \frac{2b}{N(aN-b)}}{1 + \frac{2b}{aN-b}}\right)$

On montre également que $T \leqslant \dfrac{1}{aN}\displaystyle\int_{\frac{b}{Na}}^{1-\frac{1}{N}} \frac{ds}{s(1 - s + \frac{b}{a}\ln s)}$.
Or ces deux calculs qui encadrent T, ont le même comportement pour N tendant vers l'infini.
Cela donne l'approximation $T \approx \dfrac{\ln N}{aN - b}$.

4. Approximation de S_∞ et R_∞.
   On rappelle que $R_\infty = N - S_\infty$ et que $S(0) = N - I_0$ (puisque $N = N_0$).

   (a) Montrer qu'il existe une fonction $\epsilon : x \to$, continue en 0 de valeur nulle en 0 tel que
$$\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2}(1 + \epsilon(x))$$
   (b) En déduire, avec la relation vue en 2.(f), la relation suivante :
$$\frac{a}{b}R_\infty = \frac{R_\infty - I_0}{N - I_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{R_\infty - I_0}{N - I_0}\right)^2\left(1 + \epsilon(-\frac{R_\infty - I_0}{N - I_0})\right)$$
   (c) Justifier que l'on peut faire l'approximation
$$R_\infty \approx \left(\frac{2aN}{b} - 1\right)N$$