**Devoir surveillé n°2**
CORRECTION

# Problème. Modèles démographiques et épidémiologiques

Dans ce problème, nous étudions des modélisations mathématiques à des problèmes démographiques ou de propagation de maladie.

## A. Modèle de Verhulst (1838)

$$y' = ry(1 - \frac{1}{K}y) \qquad (E)$$

où $r$ et $K$ sont deux paramètres dont on donnera un sens « physique » par la suite.

1. Une première fonction intermédiaire.

   (a) $N$ est dérivable par hypothèse (solution d'une EDL1). $t \mapsto e^{-rt}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc dérivable.
   Par multiplication,
   $$\boxed{f \text{ est dérivable sur } [0; +\infty[.}$$

   (b) On a alors, pour tout $t \geqslant 0$,
   $$f'(t) = N'(t)e^{-rt} - rN(t)e^{-rt} = rN(t)\times(1-\frac{1}{K}N(t))\times e^{-rt} - rN(t)\times e^{-rt} = -\frac{r}{K}N(t)\times N(t)e^{-rt}$$
   $$\boxed{\text{Donc } f \text{ est solution de l'équation différentielle } (E_1) : y' = -\frac{r}{K}N(t)y.}$$

   (c) Notons $\hat{N}$, une primitive de $N$ sur $\mathbb{R}$ ($N$ est continue sur $\mathbb{R}$).
   $f$ est solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, nécessairement :
   $$\exists\, K \in \mathbb{R} \qquad f : t \mapsto K \exp\left(-\int_{.}^{t} -\frac{r}{K}N(u)\mathrm{d}u\right) = K \exp\left(-\frac{r}{K}\hat{N}(t)\right)$$
   Par ailleurs, $f(0) = N(0)e^0 = N_0 = K\exp\left(-\frac{r}{K}\hat{N}(0)\right)$, donc $K = N_0 \exp\left(\frac{r}{K}\hat{N}(0)\right)$ Donc
   $$\boxed{\forall\, t \geqslant 0 \qquad f(t) = N_0 e^{-\frac{r}{K}(\hat{N}(t) - \hat{N}(0))}}$$

2. Une seconde fonction intermédiaire. Soit $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{N(t)}$.

   (a) D'après la partie précédente, pour tout $t \geqslant 0$,
   $$N(t) = f(t)e^{rt} = N_0 e^{rt - \frac{r}{K}(\hat{N}(t) - \hat{N}(0))} > 0$$
   Donc $h$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, elle est dérivable comme inverse d'une fonction dérivable jamais nulle.
   $$\boxed{h \text{ est définie et dérivable sur } [0; +\infty[.}$$

   (b) On a alors, pour tout $t \geqslant 0$
   $$h'(t) = -\frac{N'(t)}{N(t)} = r\left(1 - \frac{1}{K}N\right) = r - \frac{r}{K}h(t)$$
   $$\boxed{h \text{ est solution de l'équation différentielle linéaire } (E_2) : y' = -ry + \frac{r}{K} \ (E_2).}$$

(c) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
On résout l'équation homogène : $y' = -ry$.
On a alors une solution $y_0 : t \mapsto e^{-rt}$ car $r$ est constant.
Concernant une solution particulière, on peut appliquer une méthode de type variation de la constante, ou trouver une solution particulière, par exemple constante $y : t \mapsto \dfrac{1}{K}$

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{S} = \{t \mapsto Ce^{-rt} + \tfrac{1}{K} ; C \in \mathbb{R}\}}$$

(d) $h$ est une solution donc $h \in \mathcal{S}$, et il existe $C$ tel que $h : t \mapsto Ce^{-rt} + \frac{1}{K}$.
Or

$$h(0) = \frac{1}{N(0)} = \frac{1}{N_0} = Ce^0 + \frac{1}{K} \Rightarrow C = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}$$

Donc, pour tout $t \geqslant 0$,

$$h(t) = \frac{1}{N_0}e^{-rt} + \frac{1}{K}(1 - e^{-rt})$$

Alors, pour tout $t \geqslant 0$,

$$N(t) = \frac{1}{h(t)} = \frac{1}{\frac{1}{N_0}e^{-rt} + \frac{1}{K}(1 - e^{-rt})} \times \frac{N_0 e^{rt}}{N_0 e^{rt}} = \frac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)}$$

$$\boxed{N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)}}$$

**Remarques !**
*L'existence de $N$ est donnée dans l'énoncé. Il faudrait à ce stade vérifier que la fonction obtenue (la seule possible) est bien solution de l'équation $(E)$.*
*Il faudrait tout simplement faire le calcul et vérifier que l'égalité est juste*

3. Etude de la fonction $N$.

(a) Pour tout $t \geqslant 0$, en multipliant numérateur et dénominateur par $e^{-rt} > 0$ :

$$N(t) = \frac{N_0}{e^{-rt}(1 - \frac{N_0}{K}) + \frac{N_0}{K}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{N_0}{\frac{N_0}{K}} = K$$

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} N(t) = K}$$

Comme $K$ est la limite de $N$, quelle que soit la condition initiale ($N_0 > K$ ou $N_0 < K$), il s'agit de la capacité d'accueil du nombre de personnes $N$ dans le milieu considéré.

$$\boxed{\text{VERHULST appelle la constante } K : \text{« capacité du milieu ».}}$$

(b) $t \mapsto e^{-rt}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ ) valeur dans $]0, 1]$.
— Si $\frac{N_0}{K} > 1$, alors $t \mapsto e^{-rt}(1 - \frac{N_0}{K}$ est strictement croissante (multiplication par un nombre négatif).
L'ajout d'une constante, ne change rien.
La composition par $t \mapsto \frac{1}{t}$ rend la fonction strictement décroissante.
Dans ce cas : $N$ est décroissante.
— Si $\frac{N_0}{K} < 1$, alors $t \mapsto e^{-rt}(1 - \frac{N_0}{K}$ est strictement décroissante (multiplication par un nombre positif).
L'ajout d'une constante, ne change rien.
La composition par $t \mapsto \frac{1}{t}$ rend la fonction strictement croissante.
Dans ce cas : $N$ est croissante.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } \frac{N_0}{K} < 1,\ N \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ \text{si } \frac{N_0}{K} > 1,\ N \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+ \\ \text{et si } \frac{N_0}{K} = 1,\ N \text{ est constante égale à } K \end{array}}$$

**Remarques !**
*On peut également exploiter la dérivée, surtout qu'ici on a directement*

$$N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

*On voit le changement de signe de $N'$ dès que $N > K$ ou $N < K$, car $N > 0$*

4. On suppose que $N_0 < \frac{1}{2}K$ (et donc $\frac{N_0}{K} < 1$).

   (a) Comme $N$ est dérivable et que $N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$, alors $N'$ est également dérivable.
   Donc $N'$ est continue, donc $N$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
   Ainsi $N'$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc

   $$\boxed{N \text{ est de classe } \mathcal{C}^2.}$$

   Et pour tout $t \geqslant 0$, (en dérivant l'équation différentielle) :

   $$\begin{aligned} N''(t) &= rN'(t) - \frac{r}{K}2N(t)N'(t) \\ &= r^2N(t)\left(1 - \frac{N}{K}\right) - 2\frac{r^2}{K}N^2(t)\left(1 - \frac{N}{K}\right) \\ &= r^2N(t)\left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(1 - 2\frac{N}{K}\right) \end{aligned}$$

   $$\boxed{\forall\, t \geqslant 0, \qquad N''(t) = r^2N(t) \times \left(1 - \frac{1}{K}N\right)\left(1 - \frac{2}{K}N\right)}$$

   (b) Puisque $K > \frac{K}{2} > N_0$, nous savons que $N$ est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[N_0, K[$,
   Donc $N$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[N_0, K[$.
   Puis, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

   $$N(t) > 0\,;\ 1 - \frac{N}{K} > 0\,;\ 1 - \frac{2N}{K} = 0 \Leftrightarrow N = \frac{K}{2}$$

   Donc on a l'équivalence : $\quad N''(t) = 0 \Longleftrightarrow N(t_0) = \dfrac{K}{2}$.
   Or $N$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[N_0, K]$ et par hypothèse $N_0 < \frac{K}{2}$, donc $\frac{K}{2} \in [N_0, K[$.

   $$\boxed{\text{Donc il existe un unique réel } t_0 \text{ dans l'intervalle } ]0; +\infty[ \text{ tel que } N''(t_0) = 0 \text{ (et } N(t_0) = \tfrac{K}{2}).}$$

   (c) On a alors,

   $$N''(t) > 0 \Longleftrightarrow 1 - \frac{2N(t)}{K} > 0 \Longleftrightarrow N(t) < \frac{K}{2} = N(t_0) \Longleftrightarrow t < t_0$$

   car $N$ est strictement croissante.
   Et de même

   $$N''(t) < 0 \Longleftrightarrow t > t_0$$

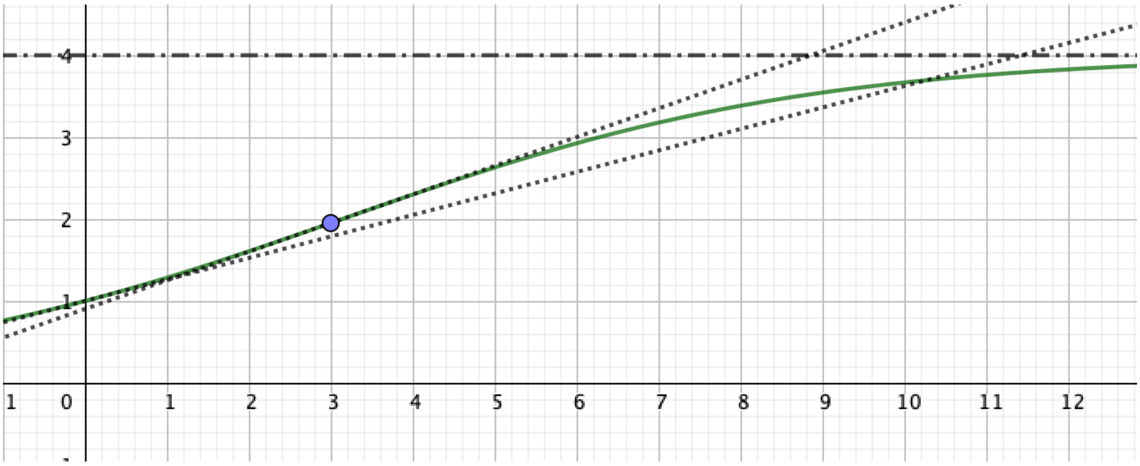
   $$\boxed{\text{Donc } N \text{ est convexe sur } [0, t_0[ \text{ et concave sur } ]t_0, +\infty[.}$$

   (d) La croissance ralentit signifie que la dérivée, toujours positive (croissance) décroit, donc que sa propre dérivée (soit la dérivée seconde de la fonction initiale) est négative.

   $$\boxed{\text{Donc la croissance ralentit signifie que } N'' = 0. \text{ C'est bien en } t_0 \text{ que cela se produit.}}$$

   On parle mathématiquement de point d'inflexion, on dit que la courbe « tourne sa concavité » : elle passe de convexe à concave ou inversement.

   (e) On a la représentation graphique suivante :




On notera la forme convexe avant le point et concave ensuite.

5. On suppose de plus que $0 < N_0 < \frac{K}{2}$.
Verhulst appelait *deuxième âge [de la croissance de la population]* la période se situant entre les instants 0 et $t_0$, et *troisième âge* la période se situant entre les instants $t_0$ et $2t_0$.

(a) On sait que $N(t) = \dfrac{N_0}{e^{-rt}(1 - \frac{N_0}{K}) + \frac{N_0}{K}}$.

Or en $t_0$, $N(t_0) = \dfrac{K}{2}$, cela donne l'équation :

$$\frac{N_0}{e^{-rt_0}(1 - \frac{N_0}{K}) + \frac{N_0}{K}} = \frac{K}{2} \iff \frac{1}{e^{-rt_0}(\frac{K}{N_0} - 1) + 1} = \frac{1}{2} \iff e^{-rt_0}(\frac{K}{N_0} - 1) = 1$$

$$\boxed{\exp(rt_0) = \frac{K}{N_0} - 1}$$

(b) On a vu

$$N : t \mapsto \frac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)} = \frac{K}{r} \frac{r\frac{N_0}{K}e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)} = \frac{K}{r}\frac{u'(t)}{u(t)}$$

avec $u : t \mapsto 1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)$.
Donc une primitive de $N$ est $\hat{N} : t \mapsto \frac{K}{r} \ln \left|1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)\right|$.
On a vu que $N > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc comme son numérateur l'est également, son dénominateur est positif.

$$\boxed{\text{Une primitive de } N \text{ sur } [0, +\infty[ \text{ est } \hat{N} : t \mapsto \tfrac{K}{r} \ln\left(1 + \tfrac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)\right).}$$

(c) On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{2t_0} N(t)\mathrm{d}t &= \hat{N}(2t_0) - \hat{N}(0) = \frac{K}{r} \ln\left(1 + \frac{N_0}{K}(e^{2rt_0} - 1)\right) - 0 = \frac{K}{r} \ln\left(1 + \frac{N_0}{K}\left((e^{rt_0})^2 - 1\right)\right) \\
&= \frac{K}{r} \ln\left(1 + \frac{N_0}{K}\left(\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)^2 - 1\right)\right) = \frac{K}{r} \ln\left(1 + \frac{N_0}{K}\left(\frac{K^2}{N_0^2} - 2\frac{K}{N_0}\right)\right) \\
&= \frac{K}{r} \ln\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) = \frac{K}{r} \ln(e^{rt_0}) = Kt_0
\end{aligned}$$

Pour avoir la valeur moyenne, on divise par $2t_0$, et donc

$$\boxed{\text{la valeur moyenne de } N \text{ entre } t = 0 \text{ et } t = 2t_0 \text{ vaut } \frac{K}{2}.}$$

(d) On a vu que $N_1 = N(t_0) = \dfrac{K}{2}$.
Donc

$$\frac{\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{N_1} - \frac{1}{K}} = \frac{\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}}{\frac{2}{K} - \frac{1}{K}} = \frac{K}{N_0} - 1 = e^{rt_0}$$

Donc en composant par ln et en divisant par $t_0$ :

$$\boxed{r = \frac{1}{t_0} \ln \frac{\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{N_1} - \frac{1}{K}}}$$

## B. Modèle SIR de Kermack et McKendrick (1926) /14

1. Les applications $S$, $I$ et $R$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$, donc par addition, $N$ l'est également.
$\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ N'(t) = S'(t) + I'(t) + R'(t) = -aSI + aSI - bI + bI = 0$

$$\boxed{\text{Donc } N \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+ \text{ et vaut } N(0) = N_0.}$$

2. Etude des limites pour $t \to +\infty$.

(a) $I$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}_+$, notée $\hat{I}$.
$S$ est alors solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, homogène.
Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $S : t \mapsto C \exp\big(-a\hat{I}(t)\big)$.
Par ailleurs $S(0) = N_0 - I_0 = C \exp\big(-a\hat{I}(0)\big)$, donc $C = \big(N_0 - I_0\big) \exp\big(a\hat{I}(0)\big)$

$$\boxed{S : t \mapsto \big(N_0 - I_0\big) \exp\big(a(\hat{I}(0) - \hat{I}(t))\big)}$$

Par produit de termes strictement positifs, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\boxed{S(t) > 0, \text{ pour tout } t \geqslant 0.}$$

(b) Pour les mêmes raisons, la fonction $\varphi : t \mapsto aS(t) - b$ est continue et admet une primitive $\Phi$ sur $\mathbb{R}_+$ Il existe alors $C' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$I(t) = C' \exp(-\Phi(t)) \Rightarrow I(0) = I_0 = C' \exp(\Phi(0))$$

Donc

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ I : t \mapsto I_0 \exp(\Phi(0) - \Phi(t)) > 0}$$

(c) Comme $S(t)$ et $I(t)$ sont positives pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $S'(t) = -aS(t)I(t) < 0$.
Donc $S$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, $S$ est positive donc minorée par 0.
La suite $(S(n))_n$ est donc décroissante, minorée donc convergente. Notons $S_\infty$ sa limite.
Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N$ tel que $\forall\, n \geqslant N$, $S_\infty < S_n < S_\infty + \epsilon$.
Par décroissance de $S$, pour tout $t \geqslant N$, $S_\infty < S(\lceil t \rceil) \leqslant S(t) \leqslant S(\lfloor t \rfloor) < S_\infty + \epsilon$.

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{t \to +\infty} S(t) = S_\infty.}$$

De même, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $R'(t) = bI(t) > 0$, donc $R$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
On a vu que $R(t) = N(t) - S(t) - I(t) = N_0 - S(t) - I(t) \leqslant N_0$ car $S$ et $I$ sont positives.
Donc $R$ est majorée. Comme pour $S$, $-R$ est convergente,

$$\boxed{\text{donc } R \text{ est convergente. On note } R_\infty = \lim_{t \to +\infty} R(t)}$$

Enfin, pour tout $t \geqslant 0$, $I(t) = N(t) - S(t) - R(t) = N_0 - S(t) - R(t)$.

$$\boxed{\text{Elle admet une limite pour } t \to +\infty \text{ (par addition) : } I_\infty = N_0 - S_\infty - R_\infty.}$$

(d) Comme $I(t) > 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, nécessairement $I_\infty \geqslant 0$.
Faisons un raisonnement par l'absurde et supposons que $I_\infty > 0$. On note $\epsilon = \frac{1}{2} I_\infty$.
Alors à partir d'un certain rang, $I(t)$ est toujours proche de $I_\infty$ à $\epsilon$. Formellement :

$$\exists\, A > 0 \mid \forall\, t \geqslant A, |I(t) - I_\infty| < \epsilon \Longleftrightarrow -\epsilon < I(t) - I_\infty < \epsilon \Longrightarrow I(t) > I_\infty - \epsilon = \frac{1}{2} I_\infty$$

Ainsi, comme $b > 0$ ;

$$\forall\, x \geqslant A, R(x) - R(A) = \int_A^x R'(t) \mathrm{d}t = b \int_A^x I(t) \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2} b I_\infty (x - A)$$

Or $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{2} b I_\infty (x - A) = +\infty$. C'est impossible !

$$\boxed{\text{Donc nécessairement : } I_\infty = 0.}$$

(e) La fonction $S$ est dérivable et est strictement positive, donc

$$\boxed{L \text{ est bien définie et dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ par composition.}}$$

On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$L'(t) = \frac{S'(t)}{S(t)} = -aI(t) = -a\hat{I}'(t)$$

On peut intégrer cette égalité entre 0 et $t$ :

$$L(t) - L(0) = \int_0^t L'(u)\mathrm{d}u = -a[\hat{I}(t) - \hat{I}(0)]$$

Et par ailleurs, $I'(t) = aI(t)S(t) - bI(t) = -S'(t) - bI(t)$.
On peut également l'intégrer entre 0 et $t$ :

$$I(t) - I_0 = \int_0^t I'(u)\mathrm{d}u = -\int_0^t S'(u)\mathrm{d}u - b\int_0^t I(t)\mathrm{d}t = S(0) - S(t) + b(\hat{I}(0) - \hat{I}(t))$$

On trouve ainsi que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ :

$$\frac{-1}{a}(L(t) - L(0)) = [\hat{I}(t) - \hat{I}(0)] = \frac{1}{b}(S_0 - S(t) - I(t) + I_0) = \frac{1}{b}(N_0 - (S(t) + I(t)))$$

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ L(t) = \frac{a}{b}(S(t) - I(t)) + \ln S(0) - \frac{a}{b}N_0}$$

(f) On a donc en faisant tendre $t \to +\infty$ (les limites existent et $I_\infty = 0$)

$$\ln(S_\infty) = \frac{a}{b}(S_\infty - 0) + \ln S(0) - \frac{a}{b}N_0$$

$$\boxed{\ln\frac{S_\infty}{S(0)} = \frac{a}{b}(S_\infty - N_0)}$$

(g) Nous savons que $S_\infty \in [0, N_0]$.
Donc $\dfrac{a}{b}(S_\infty - N_0) \in \left[-\frac{a}{b}N_0, 0\right]$. Et ainsi $S_\infty \in \left[S_0 \exp\left(-\frac{b}{a}N_0\right), S_0e^0\right]$.

$$\boxed{\text{Donc nécessairement : } 0 < S_0 \exp\left(-\tfrac{b}{a}N_0\right) \leqslant S_\infty \leqslant S_0.}$$

On notera en particulier que $S_\infty > 0$.

3. On cherche une valeur approchée du temps $T$ du pic épidémique.

(a) $S$ est continue, strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $[S(0), S_\infty]$, donc elle établit une bijection.
$\frac{b}{a} \in [S(0), S_\infty]$, donc $\frac{b}{a}$ admet un unique antécédent noté $T$ sur $\mathbb{R}$.
Si on note $S^{-1}$, la réciproque de $S$ ; on a $S(T) = \frac{b}{a} \iff T = S^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$// Par ailleurs, pour tout $t \geqslant 0$, $I'(t) = aI(t) \times (S(t) - \frac{b}{a})$.
Or on a vu que $I(t) \geqslant 0$ on a donc les variations suivantes pour $I$ :

| $t$ | $0$ | | $T$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $I$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

$$\boxed{\text{Donc } I \text{ présente un maximum local en } T \text{ tel que } S(T) = \tfrac{b}{a}.}$$

On note $S^{-1} : [S_\infty; S(0)] \to \mathbb{R}_+$, la fonction réciproque de $S$.

(b) Comme $S^{-1}(\frac{b}{a}) = T$ et $S^{-1}(S(0)) = 0$. Et $S^{-1}$ est dérivable sur $[S_\infty; S(0)]$ car sa réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annule pas (toujours strictement négative).
On a donc

$$\boxed{T - 0 = S^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - S^{-1}(S(0)) = \int_{S(0)}^{\frac{b}{a}} (S^{-1})'(u)\mathrm{d}u}$$

(c) On admet que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $S'(t) = -aS(t)\left(N - S(t) + \frac{b}{a}\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)\right)$.

**Remarques !**
*Le calcul est faisable. D'une part* $S' = aSI = aS(N - S - R)$.
*D'autre part :* $R' = bI = \frac{b}{a}\dfrac{S'}{S}$ *qui s'intègre en* $R(t) = R(t) - R_0 = \frac{b}{a}(\ln(S(t)) - \ln(S_0))$

On sait que, comme $S'(t) \neq 0$ pour tout $t \geqslant 0$,

$$(S^{-1})'(u) = \frac{1}{S'(S^{-1}(u))}$$

Donc

$$\boxed{T - 0 = \int_{S(0)}^{\frac{b}{a}} \frac{\mathrm{d}u}{S'(S^{-1}(u))} = \int_{S(0)}^{\frac{b}{a}} \frac{\mathrm{d}u}{-au\big(N - u + \frac{b}{a}\ln(\frac{u}{S(0)})\big)}}$$

(d) En faisant un changement de variable bijectif $s = \frac{u}{N}$,
On a $\mathrm{d}s = \frac{1}{N}\mathrm{d}u$ et $u = Ns$. Enfin, notons que $N_0 - 1 = N - 1 = N(1 - \frac{1}{N})$.
Dans ce cas :

$$\boxed{T = \int_{1-\frac{1}{N}}^{\frac{b}{Na}} \frac{\mathrm{d}s}{-aNs\big(1 - s + \frac{b}{aN}\ln(\frac{s}{1-\frac{1}{N}})\big)} = \int_{\frac{b}{Na}}^{1-\frac{1}{N}} \frac{\mathrm{d}s}{aNs\big(1 - s + \frac{b}{aN}\ln(\frac{s}{1-\frac{1}{N}})\big)}}$$

(e) Soit $\varphi : x \mapsto \ln(1-x) + 2x$ définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$\varphi$ est dérivable et pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ $\varphi'(x) = \dfrac{-1}{1-x} + 2 = \dfrac{1-2x}{1-x}$ Donc pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $1 - 2x \geqslant 0$, $1 - x \geqslant 0$, donc $\varphi$ croissante.

Ainsi, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$, donc $\ln(1-x) \geqslant -2x$.

$$\boxed{\forall\, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \ln(1-x) \geqslant -2x}$$

(f) On a donc en $s = x$ : $\ln(s) \leqslant s - 1$.
Et pour $N \geqslant 2$, en $x = -\frac{1}{N} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $\ln(1 - \dfrac{1}{N}) \geqslant= \dfrac{-2}{N}$.
Donc :

$$1 - s + \frac{b}{aN}\ln\left(\frac{s}{1-\frac{1}{N}}\right) = 1 - s + \frac{b}{aN}\ln s - \frac{b}{aN}\ln\left(1 - \frac{1}{N}\right) \leqslant 1 - s + \frac{b}{aN}(s-1) + \frac{2b}{aN^2}$$

En composant par la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante, on inverse le sens des inégalités ($s > 0$) :

$$\frac{1}{s\left(1 - s + \frac{b}{aN}\ln\left(\frac{s}{1-\frac{1}{N}}\right)\right)} \geqslant \frac{1}{s\left(1 - s + \frac{b}{aN}(s-1) + \frac{2b}{aN^2}\right)}$$

Puis, par croissance de l'intégrale

$$\boxed{T \geqslant \frac{1}{aN}\int_{\frac{b}{Na}}^{1-\frac{1}{N}} \frac{\mathrm{d}s}{s\left(1 - s + \frac{b}{aN}(s-1) + \frac{2b}{aN^2}\right)} = \frac{1}{aN}\int_{\frac{b}{Na}}^{1-\frac{1}{N}} \frac{\mathrm{d}s}{s\left(1 + \frac{2b}{aN^2} - \frac{b}{aN} - \left(1 - \frac{b}{aN}\right)s\right)}}$$

(g) On note $U = 1 + \frac{2b}{aN^2} - \frac{b}{aN}$ et $V = 1 - \frac{b}{aN}$, il s'agit donc de calculer $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}s}{s(U - Vs)}$.
On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{s(U - Vs)} = \frac{\frac{1}{U}}{s} + \frac{\frac{V}{U}}{U - Vs}$$

Donc

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}s}{s(U - Vs)} = \frac{1}{U}\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}s}{s} + \frac{1}{U}\int_\alpha^\beta \frac{V\mathrm{d}s}{U - Vs} = \left[\frac{1}{U}\ln|s| - \frac{1}{U}\ln|U - Vs|\right]_\alpha^\beta$$

$$\boxed{\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}s}{s(U - Vs)} = \frac{1}{U}\ln\left|\frac{\beta(U - V\alpha)}{\alpha(U - V\beta)}\right|}$$

(h) On trouve donc avec $\alpha = \frac{b}{aN}$ et $\beta = 1 - \frac{1}{N}$ :

$$\frac{U - \alpha V}{U - \beta V} = \frac{\frac{U}{V} - \alpha}{\frac{U}{V} - \beta} = \frac{1 + \frac{\frac{2b}{aN^2}}{1 - \frac{b}{aN}} - \frac{b}{aN}}{1 + \frac{\frac{2b}{aN^2}}{1 - \frac{b}{aN}} - 1 + \frac{1}{N}} = \frac{1 - \frac{b}{aN} + \frac{2b}{N(aN-b)}}{\frac{1}{N} + \frac{2b}{N(aN-b)}} = N\frac{1 - \frac{b}{aN} + \frac{2b}{N(aN-b)}}{1 + \frac{2b}{aN-b}}$$

$$\boxed{T \geqslant \frac{1}{aNU}\ln\frac{\beta}{\alpha}\frac{U - V\alpha}{U - V\beta} = \frac{\ln N}{aN - b + 2\frac{b}{N}} + \frac{1}{aN - b + 2\frac{b}{N}}\ln\left(\frac{a(N-1)}{b}\frac{1 - \frac{b}{aN} + \frac{2b}{N(aN-b)}}{1 + \frac{2b}{aN-b}}\right)}$$

**Remarques !**

*Comme $aN$ et $b$ sont comparables (en valeur) et très inférieur à $N$, on peut faire les estimations :*

$a(N-1)\equiv a$, $\frac{2b}{N(aN-b)} << 1-\frac{b}{aN}$, *et donc* $\left(\frac{a(N-1)}{b}\frac{1-\frac{b}{aN}+\frac{2b}{N(aN-b)}}{1+\frac{2b}{aN-b}}\right) << N$.

*Ainsi, le minorant ici est de l'ordre de* $\frac{\ln N}{aN-b}$.

4. Approximation de $S_\infty$ et $R_\infty$ dans le cas où $I_0$ est petit.

(a) Soit $\epsilon : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)-x-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}$.

Par addition et division, cette fonction est continue sur son ensemble de définition $]-1,+\infty[$.
On applique la règle de L'Hopital pour connaitre sa limite en 0, avec les fonctions :
$f_1 : x \mapsto \ln(1+x)-x-\frac{1}{2}x^2$ de derivées $f_1'(x)=\frac{1}{1+x}-1-x$ et $f_1''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}-1$
$g_1 : x\mapsto \frac{1}{2}x^2$ de derivées $g_1'(x)=x$ et $g_1''(x)=1$
Alors comme $g_1'(0)=f_1'(0)=0$, $g_1''(0)=1$ et $f_1''(0)=0$ :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)}=\frac{f_1''(0)}{g_1''(0)}=0$$

Et de même

$$\lim_{x\to 0}\epsilon(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)}=0$$

Donc $\epsilon$ est continue en 0, de limite nulle.

Il existe une fonction $\epsilon$, continue en 0 de valeur nulle en 0 tel que $\ln(1+x)=x+\frac{x^2}{2}(1+\epsilon(x))$

(b) On reprend la relation qui relie $S_\infty$ à lui-même :

$$\frac{a}{b}(S_\infty-N)=\ln\frac{S_\infty}{S(0)}=\ln\frac{S_\infty}{N-I_0}=\ln\left(1+\frac{S_\infty-N+I_0}{N-I_0}\right)=\ln\left(1-\frac{R_\infty-I_0}{N-I_0}\right)$$

Donc avec la relation précédente en $x=-\dfrac{R_\infty-I_0}{N-I_0}$ :

$$-\frac{a}{b}R_\infty=\frac{a}{b}(S_\infty-N)=-\frac{R_\infty-I_0}{N-I_0}+\frac{1}{2}\left(-\frac{R_\infty-I_0}{N-I_0}\right)^2\left(1+\epsilon(-\frac{R_\infty-I_0}{N-I_0})\right)$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{a}{b}R_\infty=\frac{R_\infty-I_0}{N-I_0}+\frac{1}{2}\left(\frac{R_\infty-I_0}{N-I_0}\right)^2\left(1+\epsilon(-\frac{R_\infty-I_0}{N-I_0})\right)}$$

(c) On supposant $I_0$ très faible initialement devant $N$ et aussi devant $R_\infty$, on peut faire l'approximation :

$$\frac{a}{b}R_\infty=\frac{R_\infty}{N}+\frac{1}{2}\frac{R_\infty^2}{N^2}(1+\epsilon(\frac{R_\infty}{N}))$$

Avec $\frac{R_\infty}{N}$ proche de 0, $\epsilon(\frac{R_\infty}{N})\approx 0$ et donc $R_\infty$ est solution de l'équation (simplifiée par $R_\infty$) :

$$\frac{a}{b}\approx\frac{1}{N}+\frac{1}{2N^2}R_\infty$$

$$\boxed{R_\infty\approx\left(\frac{2aN}{b}-1\right)N}$$

**Remarques !**

*C'est un facteur donc on a beaucoup entendu parler pendant le confinement : la comparaison à 1 de* $\frac{a}{b}N$ *et de* $2\frac{a}{b}N$...

Des informations complémentaires :
http ://images.math.cnrs.fr/Modelisation-d-une-epidemie-partie-1.html