Devoir à la maison n°3

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la <u>précision</u> des raisonnements et l'énoncé des <u>formules utilisées</u>**.

Exercice 1

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Montrer que : si $\forall\ A, B \subset E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, alors f est injective.
2. Montrer que : $\exists\ A, B \subset E$ tels que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B) \Longrightarrow f$ non injective.
3. Qu'avez-vous démontrer avec ces deux implications ?

Exercice 2

Soit E un ensemble. On note, pour toutes parties A et B de E :

$$A\Delta B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$$

où $\overline{G}$ est le complémentaire de G dans E.
$A\Delta B$ est appelé la différence symétrique de A et B.

1. Déterminer $A\Delta B$ dans les deux exemples précédents :
   (a) $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 3\}$.
   (b) $E = \mathbb{R}$, $A =]_\infty; 2]$ et $B = [1; +\infty[$.
2. Etablir : $\forall\ A, B \subset E,\ A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$
3. Montrer que pour tout $A, B \subset E$, $\mathbf{1}_{A\Delta B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$
4. En déduire que Δ est associative dans $\mathcal{P}(E)$:

$$\forall\ (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3, \quad (A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

Exercice 3

On note $E = \{0, 1\}$. On étudie dans cet exercice différentes relation d'ordre sur $E^{\mathbb{N}}$, (ensemble des suites à valeurs dans $E = \{0, 1\}$)

1. On munit $E^{\mathbb{N}}$ de l'ordre lexicographique :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \preceq_1 (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad := \quad \forall\ n \in \mathbb{N}, u_n = v_n \text{ ou } [\exists\ n \in \mathbb{N} \mid u_n < v_n \text{ et } \forall\ p < n, u_p = v_p]$$

   Démontrer que $\preceq_1$ est une relation d'ordre sur $E^{\mathbb{N}}$.
   Est-ce une relation d'ordre total ?
2. On considère $\chi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to E^{\mathbb{N}}$, $A \mapsto \mathbf{1}_A$.
   (a) Montrer que χ est bijective.
   (b) Montrer que χ est un morphisme de $(\mathcal{P}(N), \cap)$ sur $(E^{\mathbb{N}}, \times)$, c'est-à-dire :

$$\chi(\mathbb{N}) = \mathbf{1} \qquad \forall\ A, B \subset \mathbb{N}, \chi(A \cap B) = \chi(A) \times \chi(B)$$

   (c) Que dire de $\chi(\overline{A})$ (complémentaire de A) et de $\chi(A \cup B)$?
   (d) Quelle relation d'ordre $\preceq_2$ est définie sur $E^{\mathbb{N}}$ par l'image de la relation $\subset$ par χ ?
3. On note $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que l'application $D : \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, $A \mapsto \sum_{a\in A} 2^a$ est une bijection.
   (b) Démontrer que D est un morphisme de $(\mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \uplus)$ sur $(\mathbb{N}, \leqslant, +)$, c'est-à-dire

$$D(\emptyset) = 0 \qquad \forall\ A, B \subset \mathbb{N}, D(A \uplus B) = D(A) + D$$

   (c) Décrire l'unique relation d'ordre $\lll$ sur $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ telle que D transforme la relation d'ordre $\lll$ en $\leqslant$.