# Devoir à la maison n°2
CORRECTION

## Exercice 1

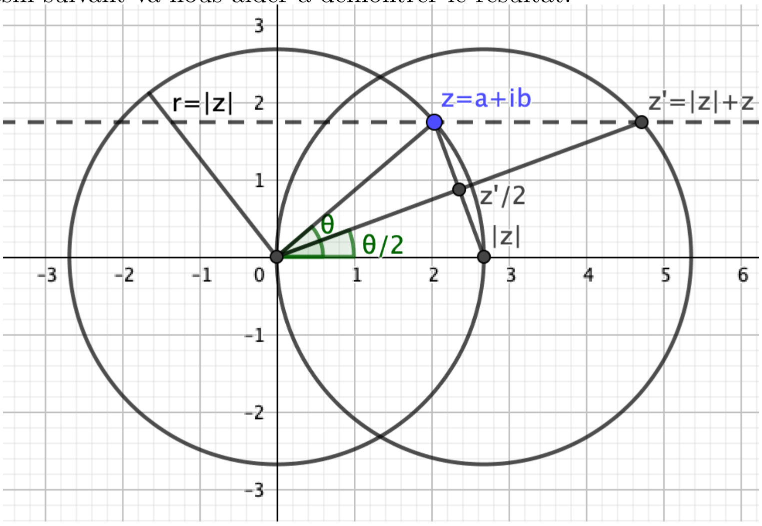
1. Démontrer la formule suivante (*Théorème de l'angle au centre*) :

**Piste de recherche...**
*Le nombre $Z = |a| + Re(z) + iIm(z)$, semble jouer un rôle important, puisque son argument est*

$$\arctan \frac{Im(Z)}{Re(Z)} = \arctan \frac{Im(z)}{|z| + Re(z)}$$

*Or ce nombre est aussi simplement : $Z = z + |a| = z - z'$ où $z' = -|a|$*

**Géométriquement** :
Le dessin suivant va nous aider à démontrer le résultat.




Le quadrilatère $(0, z, |z| + z, |z|)$ est un losange, tous ces côtés valent la même longueur : $|z|$.
La diagonale $(0, |z| + z)$ est une bissectrice de l'angle $|z|, 0, z$, valant $\theta$.
Donc l'angle $(|z|, 0, |z| + z)$ vaut $\frac{\theta}{2}$. C'est l'argument de $|z| + z = (|z| + \mathrm{Re}(z)) + i\mathrm{Im}(z)$.
Donc

$$\frac{\theta}{2} = \arg((|z| + \mathrm{Re}(z)) + i\mathrm{Im}(z)) = \arg\left(|z| + \mathrm{Re}(z))[1 + i\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z| + \mathrm{Re}(z)}]\right) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z| + \mathrm{Re}(z)}\right)$$

Ainsi

$$\arg z = \theta = 2\arctan \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z| + \mathrm{Re}(z)}$$

**Algébriquement** :
On suppose que $|z| + z \neq 0$, ie : $z \neq -|z|$, ou encore $z \notin \mathbb{R}_-$.
On élève au carré : $|z| + z$ :

$$(|z|+z)^2 = |z|^2+z^2+2z|z| = (a^2+b^2)+(a^2-b^2+2iab)+2|z|(a+ib) = [2a^2+2|z|a]+i[2ab+2|z|b] = 2(a+|z|)(a+ib)$$

Donc

$$2\arg(|z| + z) = \arg(|z| + z)^2 = \arg(2(a + |z|)(a + ib)) = \arg(a + ib) = \arg z \qquad [2\pi]$$

car $2(a + |z|)$ est un nombre réel positif $(-a = -\mathrm{Re}(z) < |z|)$ Or

$$\arg(|z| + z) = \arctan \frac{\mathrm{Im}(|z| + z)}{\mathrm{Re}(|z| + z)} = \arctan \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z| + \mathrm{Re}(z)}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \qquad \arg z = 2\arctan \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z| + \mathrm{Re}(z)}}$$

2. (a) Si $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\left|\frac{1+ix}{1-ix}\right| = \frac{|1+ix|}{|1-ix|} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

Donc : $\qquad x \in \mathbb{R} \implies \left|\frac{1+ix}{1-ix}\right| = 1.$

Réciproquement, si $\left|\frac{1+ix}{1-ix}\right| = 1,$

Alors il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $1+ix = (1-ix)e^{i\varphi}$, donc $ix(1+e^{i\varphi}) = e^{i\varphi} - 1$.

$$x = \frac{1}{i}\frac{e^{i\varphi/2}(e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2})}{e^{i\varphi/2}(e^{-i\varphi/2} + e^{i\varphi/2})} = \frac{1}{i}\frac{2i\sin\varphi/2}{2\cos\varphi/2} = \tan\frac{\varphi}{2} \in \mathbb{R}$$

Donc : $\qquad \left|\frac{1+ix}{1-ix}\right| = 1 \implies x \in \mathbb{R}.$

Par double implication :

$$\boxed{\left|\frac{1+ix}{1-ix}\right| = 1 \iff x \in \mathbb{R}}$$

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme $a \in \mathbb{R}$, d'après (a) : $\left|\frac{1+ia}{1-ia}\right| = 1,$

donc si $Z = \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)$, alors $|Z|^n = |Z^n| = 1$, donc $|Z| = 1$.

Et d'après la question précédente, $x \in \mathbb{R}$.

La fonction arctan établit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

Donc il existe $\varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $x = \tan\varphi$.

De même, il existe un unique $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $a = \tan\alpha$.

$$\frac{1+ia}{1-ia} = \frac{(1+ia)^2}{1+a^2} = \frac{1-\tan^2\alpha + 2i\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) = e^{2i\alpha}$$

$$Z = \frac{1+ix}{1-ix} = e^{2i\varphi}$$

Ainsi : $e^{2in\varphi} = e^{2i\alpha}$ donc

$$2n\varphi \equiv 2\alpha\,[2\pi] \implies \varphi \equiv \frac{\alpha}{n}\left[\frac{\pi}{n}\right]$$

Par conséquent, les solutions de l'équations sont de la forme : $x \in \{\tan\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Et comme

$$\tan\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n} = \tan\frac{\alpha}{n} + \frac{k'\pi}{n} \iff \frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n} \equiv \frac{\alpha}{n} + \frac{k'\pi}{n}[\pi] \iff k \equiv k'[n]$$

Il suffit de prendre les solutions dans un intervalles de $n$ termes consécutifs : Par conséquent, les solutions de l'équations sont de la forme : $x \in \{\tan\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

Réciproquement, ces nombres fonctionnent :

$$\left(\frac{1+ix_k}{1-ix_k}\right)^n = (e^{2i\varphi_k})^n = e^{2in\varphi_k} = e^{i\alpha} = \frac{1+ia}{1-ia}$$

$$\boxed{\text{Les racines de l'équation } \left(\frac{1+ix}{1-xi}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia} \text{ sont les nombres } x_k = \tan\frac{\alpha+k\pi}{n}}$$

## Exercice 2

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $x > 0$ :

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$f_n(0) = \left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = 1^n = 1$

$f_n(n) = \left(1 + \frac{n}{n}\right)^n = 2^n$

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 1 \text{ et de } \lim_{n\to+\infty} f_n(n) = +\infty.}$$

2. On reconnait un nombre dérivée de $t \mapsto \ln(1+t)$ en $t = 0$ (ou on applique la formule de L'Hopital) :

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t) - \ln(1+0)}{t-0} = \frac{1}{1+0} = 1}$$

3. Soit $x>0$. Avec le changement de variable $t=\frac{x}{n}$, on a bien $t\to 0$ lorsque $n\to+\infty$.
Donc
$$1=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\lim n\to+\infty\frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}=\frac{1}{x}\lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{x}{n})$$
Donc
$$\boxed{\forall\, x>0,\qquad \lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{x}{n})=x}$$

4. En composant par la fonction exponentielle, continue en $x$ :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\exp\left(n\ln(1+\frac{x}{n})\right)=\exp\left(\lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{x}{n})\right)=e^x}$$
Puis
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(\sqrt{n})=\lim_{n\to+\infty}\exp\sqrt{n}\left(\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\right)$$
Or
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\right)=1$$
donc à partir d'un certain rang : $\left(\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\right)\geqslant\frac{1}{2}$ et $\sqrt{n}\left(\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\right)\geqslant\frac{\sqrt{n}}{2}\to+\infty$.
On compose ensuite avec exponentielle :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n(\sqrt{n})=+\infty}$$
De même
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(\frac{1}{\sqrt{n}})=\lim_{n\to+\infty}\exp\frac{1}{\sqrt{n}}\left(n\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n\sqrt{n}})\right)$$
Or
$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n\sqrt{n}})\right)=1$$
A partir d'un certain rang : $0\leqslant\left(\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n\sqrt{n}})\right)\leqslant\frac{3}{2}$ et $0\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\left(n\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n\sqrt{n}})\right)\leqslant\frac{3}{2\sqrt{n}}$
On a alors convergence par encadrement : $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(n\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n\sqrt{n}})\right)\to 0$.
On compose ensuite avec exponentielle :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n(\frac{1}{\sqrt{n}})=1}$$

## Exercice 3

On considère $f:x\mapsto\begin{cases}1 & \text{si } x=0\\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x\neq 0\end{cases}$

1. Continuité de $f$
   (a) $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ entier.
   Soit $x=0$ et alors $f(x)=1$, par définition, soit $x\neq 0$ et $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.
   $$\boxed{\mathcal{D}_f=\mathbb{R}}$$
   (b) On rappelle que pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ : $\sin x\leqslant x\leqslant\tan x$.
   Ces fonctions sont impaires, donc en prenant $x<0$ donc $(-x)>0$ :
   $$-\sin x=\sin(-x)\leqslant(-x)\leqslant\tan(-x)=-\tan x$$
   En multipliant par $-1$, on inverse le sens des inégalités :
   $$\boxed{\text{Pour } x\in[-\tfrac{\pi}{2},0],\qquad \sin x\geqslant x\geqslant\tan x.}$$

(c) $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, comme les fonctions sin et $x\mapsto$ et par division.

Et en 0 : Pour $x>0$ : $\dfrac{\sin x}{x}\leqslant 1$ et $\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\dfrac{\tan x}{x}\geqslant 1$ donc $\dfrac{\sin x}{x}\geqslant \cos x$.

Ainsi : $\cos x\leqslant f(x)\leqslant 1$. Par encadrement : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ ($\cos 0=1$).

De même pour $x<0$ : $\sin x\geqslant x$, mais en divisant par un nombre négatif : $\dfrac{\sin x}{x}\leqslant 1$.

On trouve donc, de la même façon : $\cos x\leqslant f(x)\leqslant 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$. Ainsi $f$ est également continue en 0.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Si besoin, par la suite, on notera $F=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, la primitive de $f$ qui s'annule en 0.

2. On note $h : x\mapsto \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{F(x)}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

   (a) $h$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, ensemble symétrique par rapport à 0 : $x\in\mathcal{D}_h\Rightarrow -x\in\mathcal{D}_h$.
   En outre pour $x\in\mathcal{D}_h$,
   $$h(-x)=\frac{1}{-x}\int_0^{-x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{-1}{x}\int_0^{x}\frac{\sin(-u)}{-u}(-\mathrm{d}u)=h(x)$$
   où l'on pose $u=-t\Longleftrightarrow t=-u$ et $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$. On exploite l'imparité de sin.
   $$\boxed{h \text{ est paire.}}$$
   On fera l'étude sur $\mathbb{R}_+^*$, la seconde partie est symétrique.

   (b) $F$ est dérivable (de dérivée $f$), donc par division :
   $$\boxed{h \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$
   Puis pour tout $x>0$ (et $x<0$)
   $$h'(x)=\frac{xF'(x)-F(x)}{x^2}=\frac{1}{x}f(x)-\frac{F(x)}{x^2}$$
   $$\boxed{h'(x)=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{1}{x^2}F(x)}$$

   (c) On a vu que pour tout $x\in]0,\frac{\pi}{2}]$ et $t\in]0,x]$ : $\cos t\leqslant f(t)\leqslant 1$ (vraie aussi en $t=0$).
   On intègre entre $t=0$ et $t=x$
   $$\sin x=\sin x-\sin 0=\int_0^x\cos t\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x 1\mathrm{d}t=x$$
   En divisant par $x>0$ (on ne change pas le sens des inégalités) :
   $$\boxed{\text{Pour tout } x\in]0,\tfrac{\pi}{2}],\ \frac{\sin x}{x}\leqslant h(x)\leqslant 1.}$$

   (d) La encore, par encadrement (même limite à droite et à gauche)
   $$\boxed{h \text{ admet une limite en } 0 : \lim_{x\to 0} h(x)=1.}$$

3. Variations de $h$.
   Comme, pour $x\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $\dfrac{\sin x}{x}\leqslant h(x)=\frac{1}{x}F(x)$, on a
   $$h'(x)=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{F(x)}{x^2}\leqslant 0$$
   $$\boxed{\text{Donc } h \text{ est décroissante sur } ]0,\tfrac{\pi}{2}].}$$

4. Dérivabilité en 0.
   Il faut faire l'étude de
   $$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$$
   pour savoir si $h$ (prolongé par la valeur en 1 en 0) est bien dérivable en 0.

(a) On note $\epsilon : x \mapsto \dfrac{f(x) - 1 + \frac{x^2}{3!}}{x^3} = \dfrac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4}$. Elle est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Il reste à étudier la continuité de $\epsilon$ en 0, donc à étudier sa limite en 0.

On applique le théorème de L'Hopital à plusieurs reprises :

On note $f_1(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ et $f_2(x) = x^4$. On a $\lim_0 f_1 = 0$ et $\lim_0 f_2 = 0$.

Donc $\lim\limits_0 \dfrac{f_1}{f_2}$ est une forme indéterminée. On exploite le théorème de L'Hopital.

Les dérivées de $f_1$ et $f_2$ sont respectivement :

$$\begin{array}{lllll} \forall\, x > 0, & f_1'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} & f_1''(x) = -\sin x + x & f_1^{(3)}(x) = -\cos x + 1 & f_1^{(4)}(x) = \sin x, \\ & f_2'(x) = 4x^3 & f_2''(x) = 12x^2 & f_2^{(3)}(x) = 24x & f_2^{(4)}(x) = 24 \end{array}$$

On note alors que, puisqu'on a des formes indéterminées (L'Hopital) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1^{(3)}(x)}{f_2^{(3)}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f_1^{(4)}(x)}{f_2^{(4)}(x)} = \frac{0}{24} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1^{(2)}(x)}{f_2^{(2)}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f_1^{(3)}(x)}{f_2^{(3)}(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f_1''(x)}{f_2''(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = 0$$

donc $\epsilon$ est continue en 0 (et vaut 0 en 0).

$$\boxed{\text{Il existe une fonction } \epsilon : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \text{ continue en 0 telle que } f(x) = 1 - \tfrac{x^2}{3} + x^3\epsilon(x).}$$

(b) On a donc, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x (1 - \frac{t^2}{3} + t^3\epsilon(t))\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[t - \frac{t^3}{9}\right]_0^x + \frac{1}{x}\int_0^x t^3\epsilon(t)\mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{x}\int_0^x t^3\epsilon(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{h(x) - 1}{x} = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{x^2}\int_0^x t^3\epsilon(t)\mathrm{d}t$$

Or $\epsilon$ est continue en 0, de limite nulle. Donc il existe $X$ tel que $\forall\, x \in [-X, X]$, $|\epsilon(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.

On a alors pour tout $x \in [-X, X]$ :

$$\left|\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} + \frac{1}{9}x\right| \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^x |t^3| \times |\epsilon(t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{4x^2}\frac{|x|^4}{4} = \frac{x^2}{16}$$

Donc, par majoration : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{9}x = 0.$

$$\boxed{h \text{ est dérivable en 0 et que } h'(0) = 0.}$$