Devoir surveillé n°3

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé de trois ou quatre exercices.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice 1 - Une (in)équation différentielle /16

On considère une fonction $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive et croissante.
On lui associe l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants (a priori) :

$$\forall\, x \geqslant 0 \qquad y''(x) + q(x)y(x) = 0 \qquad (E_q)$$

1. Cas particulier.
   Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation (E_q) pour $q : x \mapsto 4$, sur $\mathbb{R}_+$.
   Montrer que toutes les solutions de (E_4) sont bornées.

On fixe dans tout l'exercice y une solution (particulière) de (E_q).

2. Une majoration différentielle.
   (a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $2y'(x)y''(x) + 2q(x)y(x)y'(x) = 0$
   (b) En déduire que pour tout $x \geqslant 0$:
   $$(y'(x))^2 - (y'(0))^2 + 2\int_0^x q(t)y(t)y'(t)\mathrm{d}t = 0$$
   (c) En faisant une intégration par parties (justifiée), montrer alors qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+$ (dont on donnera une expression explicite) telle que
   $$\forall\, x \geqslant 0 \qquad (y'(x))^2 + q(x)(y(x))^2 = K + \int_0^x q'(t)(y(t))^2\mathrm{d}t$$
   (d) Conclure que
   $$\forall\, x \geqslant 0 \qquad q(x)(y(x))^2 \leqslant K + \int_0^x \frac{q'(t)}{q(t)} \times q(t)(y(t))^2\mathrm{d}t$$
3. Lemme de Gronwall. On note $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{q'(t)}{q(t)} \times q(t)(y(t))^2\mathrm{d}t$
   (a) Pourquoi est-ce que F est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?
   (b) En exploitant l'inéquation de 2.(d), montrer que
   $$\forall\, x \geqslant 0 \qquad \frac{q(x)F'(x) - q'(x)F(x)}{q^2(x)} \leqslant K\frac{q'(x)}{q^2(x)}$$
   (c) Montrer alors que :
   $$\forall\, x \geqslant 0 \qquad \frac{F(x)}{q(x)} \leqslant K\left[\frac{1}{q(0)} - \frac{1}{q(x)}\right]$$
   (d) En déduire que
   $$\forall\, x \geqslant 0 \qquad q(x)(y(x))^2 \leqslant K\frac{q(x)}{q(0)}$$
   (e) Conclure que y est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 - Famille d'intégrales /30

Dans tout cet exercice, on considère pour tout $\alpha, \beta > -1$:

$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \mathrm{d}x$$

On donnera un sens à cette expression lorsque α ou $\beta \in]-1,0]$, par la suite

1. Calcul de $I_{\alpha,0}$ pour $\alpha > -1$.
   (a) Calculer, pour $\alpha \geqslant 0$, $I_{\alpha,0}$
   (b) Pour $\alpha \in]-1,0]$, donner une primitive de $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ sur $]0,1]$.
   En déduire que $\lim\limits_{t\to 0^+} \int_t^1 f_\alpha(x)\mathrm{d}x$ existe et donner sa valeur. On la notera également $I_{\alpha,0}$.

Quitte à élargir la définition de l'intégration comme précédemment,
on admet que $I_{\alpha,\beta}$ est défini lorsque $\alpha > -1$ et $\beta > -1$.

2. Relations de récurrence et valeurs entières.
   (a) Avec un changement de variable montrer que $I_{\alpha,\beta} = I_{\beta,\alpha}$.
   On se contentera d'une démonstration dans le cas α et $\beta \geqslant 0$ et admettra les autres cas.
   (b) Premier relation de récurrence.
      i. Montrer que

$$\forall\ \alpha > -1, \beta > 0 \ : \qquad I_{\alpha,\beta} = \frac{\beta}{\alpha+1} I_{\alpha+1,\beta-1}$$

      ii. En déduire que pour tous entiers $n, m \in \mathbb{N}$, $I_{n,m} = \dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}$
      iii. Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Montrer également en exploitant une formule associée à un fameux mathématicien (et physicien) anglais du XVII siècle :

$$I_{n,m} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{n+1+k}\binom{m}{k}$$

      iv. En déduire que pour tout entier n et $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (n+m+1)!}{k!(m-k)!(n+1+k)} = n!$$

   (c) Seconde relation de récurrence.
      i. Montrer que

$$\forall\ \alpha > -1, \beta > -1 \ : \qquad I_{\alpha,\beta} = I_{\alpha+1,\beta} + I_{\alpha,\beta+1}$$

      ii. En déduire que :

$$\forall\ \alpha > -1, \beta > -1 \ : \qquad I_{\alpha,\beta} = \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+1} I_{\alpha+1,\beta}$$

3. Valeurs demi-entières.
   (a) En faisant le même changement de variable : $x = \sin^2\theta$ pour les deux intégrales suivantes, montrer que

$$I_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \pi \qquad \text{et} \qquad I_{-\frac{1}{2},0} = 2$$

   On expliquera bien précisément pourquoi on peut faire ce changement de variable.
   (b) Montrer alors par récurrence (et avec les relation 2.(c).ii. et 2.(a))

$$\forall\ r \in \mathbb{N} \quad I_{-\frac{1}{2};r-\frac{1}{2}} = \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2}\pi \qquad \text{et} \qquad I_{-\frac{1}{2};r} = \frac{2^{2r+1}(r!)^2}{(2r+1)!}$$

4. Encadrement
   (a) Soient $\alpha > -1$ et ,$\beta' > \beta > -1$. Montrer que

$$I_{\alpha,\beta} \geqslant I_{\alpha,\beta'}$$

   (b) En déduire que pour tout entier $r \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2r+1}{2r+2} \times I_{-\frac{1}{2},r-\frac{1}{2}} \leqslant I_{-\frac{1}{2},r} \leqslant I_{-\frac{1}{2},r-\frac{1}{2}}$$

(c) On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$.

Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $I_{-\frac{1}{2},r-\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{r}}\dfrac{x_{2r}}{x_r^2}\pi$ et $I_{-\frac{1}{2},r} = \sqrt{\dfrac{r}{2}}\dfrac{1}{r+\frac{1}{2}}\dfrac{x_r^2}{x_{2r}}$

(d) En déduire que pour tout $r \in \mathbb{N}$:

$$\pi\frac{(2r+1)^2}{r(2r+2)} \leqslant \frac{x_r^4}{x_{2r}^2} \leqslant \pi\frac{2r+1}{r}$$

(e) On démontre, par ailleurs que (x_n) est une suite convergente. Quelle est sa limite ?

Exercice 3 - Fonction σ_f-additive /24

Cet exercice prépare à la structure mathématique des espaces de probabilité. On en garde le vocabulaire et les notations

On considère un ensemble noté Ω et appelé univers.

On note $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des sous ensembles de Ω. On a donc $A \subset \Omega \Leftrightarrow A \in \mathcal{T}$.

On dit qu'une application $H : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ est σ_f-additive (f *comme fini*) si

$$\forall\ A, B \in \mathcal{T}, H(A \uplus B) = H(A) + H(B)$$

(on rappelle qu'ici est sous-entendu le fait que A et B sont disjoints, i.e. $A \cap B = \emptyset$).

1. Croissance de $\mathbf{P}$.
   On suppose que $\mathbf{P}$ est σ_f-additive à valeurs dans $[0,1]$.
   (a) L'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{T}$. Qu'est-ce que cela signifie formellement ? L'ordre est-il total ?
   On n'attend ici que des affirmations, sans démonstrations
   (b) Montrer que
   $$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{P}\Big(\biguplus_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)$$
   (c) Montrer que $\mathbf{P}$ est croissante de $(\mathcal{T}, \subset)$ vers $([0,1], \leqslant)$, i.e.
   $$\forall\ A, B \in \mathcal{T}, \qquad A \subset B \Longrightarrow \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$$
   (d) Montrer que si $\mathbf{P}$ est σ_f-additive à valeurs dans $[0,1]$,
   alors pour tout $A, B \in \mathcal{T}$, $\mathbf{P}(A \cup B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.
2. Exemples d'applications $\mathbf{P}$.
   On suppose dans cette question 2. que Ω est de cardinal fini.
   (a) Montrer que $\mathbf{P}_\Omega : A \mapsto \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ est σ_f-additive et à valeurs dans $[0,1]$.
   (b) Soit $M \in \mathcal{T}$, $M \neq \emptyset$.
   Montrer que $\mathbf{P}_M : A \mapsto \dfrac{\text{card}(A \cap M)}{\text{card}(M)}$ est également σ_f-additive et à valeurs dans $[0,1]$.
3. Variables aléatoires.
   Soit $\mathbf{P}$ σ_f-additive sur $\mathcal{T}$, à valeurs dans $[0,1]$ et tel que $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.

   On appelle variables aléatoires réelles, les applications de $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
   — Si X et Y sont deux variables aléatoires, alors on note $X + Y : \omega \mapsto X(\omega) + Y(\omega)$
   et de même pour $X - Y$ ou $|X|$...
   — On note pour tout $I \subset \mathbb{R}$, $[X \in I]$, l'ensemble réciproque $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$.
   — On définit la relation $\asymp$ sur les variables aléatoires par :
   $$X \asymp Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = 0$$
   Dans ce cas, on dit que X égale Y presque sûrement (ou presque partout)
   (a) Montrer que $\asymp$ est une relation d'équivalence sur les variables aléatoires.
   (b) Montrer que si $X_1 \asymp X_2$ et $Y_1 \asymp Y_2$, alors $X_1 + Y_1 \asymp X_2 + Y_2$
   (c) On suppose de nouveau que Ω est fini. Pourquoi peut-on supposer que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots x_k\}$?
   Montrer alors que $X \asymp \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{1}_{[X=x_i]}$