Devoir surveillé n°3
CORRECTION

Exercice 1 - Une (in)équation différentielle

On considère une fonction $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive et croissante.
On lui associe l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants :

$$\forall\, x \geqslant 0 \qquad y''(x) + q(x)y(x) = 0 \qquad (E_q)$$

On fixe dans tout l'exercice y une solution (particulière) de (E_q).

1. Cas particulier.
   On associe à l'équation $y'' + 4y = 0$, l'équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$.
   Ses racines sont $-2i$ et $2i$, donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est /2

$$\boxed{\mathcal{S} = \{f_{A,B} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto A\cos(2x) + B\sin(2x); A, B \in \mathbb{R}\}}$$

/1

$$\boxed{\text{Toutes ces solutions sont bornées : pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ |f_{A,B}(x)| \leqslant \max(|A|, |B|)}$$

2. Une majoration différentielle.
   (a) Pour tout $x \geqslant 0$, en multipliant (E_q) par $2y'(x)$, on trouve /1

$$\boxed{\forall\, x \geqslant 0,\ 2y'(x)y''(x) + 2q(x)y(x)y'(x) = 0}$$

   (b) Pour tout $x \geqslant 0$, on intègre cette relation pour t entre 0 et x :

$$0 = \int_0^x 0\mathrm{d}t = \int_0^x 2y'(t)y''(t)\mathrm{d}t + 2\int_0^x q(t)y(t)y'(t)\mathrm{d}t = \left[[y'(t)]^2\right]_0^x + 2\int_0^x q(t)y(t)y'(t)\mathrm{d}t$$

/1

$$\boxed{\forall\, x \geqslant 0\ :\ (y'(x))^2 - (y'(0))^2 + 2\int_0^x q(t)y(t)y'(t)\mathrm{d}t = 0}$$

   (c) Soient $u : t \mapsto q(t)$ et $v : t \mapsto y^2(t)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse.
   Alors pour tout $t \geqslant 0$, $u'(t) = q'(t)$ et $v'(t) = 2y'(t)y(t)$.
   On peut donc faire une intégration par parties :

$$\forall\, x \geqslant 0 \qquad 2\int_0^x q(t)y(t)y'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

   Cela donne :

$$\forall\, x \geqslant 0 \qquad (y'(x))^2 = (y'(0))^2 - 2\int_0^x q(t)y(t)y'(t)\mathrm{d}t = (y'(0))^2 - q(x)y^2(x) + q(0)y^2(0) + \int_0^x q'(t)y^2(t)\mathrm{d}t$$

   Posons $K = (y'(0))^2 + q(0)y^2(0) \geqslant 0$, car $q(0) \geqslant 0$ par hypothèse,
   ainsi que les carrés : $(y'(0))^2$ et $y^2(0)$: /2

$$\boxed{\forall\, x \geqslant 0 \qquad (y'(x))^2 + q(x)(y(x))^2 = K + \int_0^x q'(t)(y(t))^2\mathrm{d}t}$$

   (d) Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(y'(x))^2 \geqslant 0$, on trouve : /1

$$\boxed{\forall\, x \geqslant 0 \qquad q(x)(y(x))^2 \leqslant K + \int_0^x \frac{q'(t)}{q(t)} \times q(t)(y(t))^2\mathrm{d}t}$$

3. Lemme de Gronwall. On note $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{q'(t)}{q(t)} \times q(t)(y(t))^2 \mathrm{d}t$

(a) Les fonctions $t \mapsto q'(t)$ $t \mapsto q(t)$ et $t \mapsto ((y(t))^2$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$,

et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $q(t) > 0$, donc $\Psi : t \mapsto \dfrac{q'(t)}{q(t)} \times q(t)(y(t))^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Elle admet une primitive qui s'annule en 0 : c'est F. /1,5

$$\boxed{\text{Et celle-ci est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ (avec } F' = \Psi).}$$

(b) On a alors, pour tout $x \geqslant 0$, $F'(x) = \dfrac{q'(t)}{q(t)} \times q(t)(y(t))^2$,

Puis par hypothèse : $q' \geqslant 0$ (q croissante) et $q > 0$.

Donc, pour tout $x \geqslant 0$

$$\frac{q(x)F'(x) - q'(x)F(x)}{q^2(x)} \leqslant \frac{1}{q^2(x)} \left(q'(t)K + q'(t) \underbrace{\int_0^x \frac{q'(t)}{q(t)} \times q(t)(y(t))^2 \mathrm{d}t}_{F(x)} - q'(x)F(x) \right) = K\frac{q'(x)}{q^2(x)}$$

/2

$$\boxed{\forall\, x \geqslant 0 \qquad \frac{q(x)F'(x) - q'(x)F(x)}{q^2(x)} \leqslant K\frac{q'(x)}{q^2(x)}}$$

(c) En intégrant entre 0 et $x (\geqslant 0)$, puisque l'intégration est croissante (conserve les inégalités)

$$\left[\frac{F(t)}{q(t)}\right]_0^x = \int_0^x \frac{q(t)F'(t) - q'(t)F(t)}{q^2(t)} \mathrm{d}t \leqslant K \int_0^x \frac{q'(t)}{q^2(t)} \mathrm{d}t = K\left[\frac{-1}{q(t)}\right]_0^x$$

Donc, comme $F(0) = 0$ (primitive de Ψ qui s'annule en 0) : /1,5

$$\boxed{\forall\, x \geqslant 0 \qquad \frac{F(x)}{q(x)} \leqslant K\left[\frac{1}{q(0)} - \frac{1}{q(x)}\right]}$$

(d) Reprenons alors l'inégalité en 2.(d) et exploitons le fait que $q(x) > 0$, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\forall\, x \geqslant 0 \qquad q(x)(y(x))^2 \leqslant K + F(x) \leqslant K + K\frac{q(x)}{q(0)} - K$$

/1,5

$$\boxed{\forall\, x \geqslant 0 \qquad q(x)(y(x))^2 \leqslant K\frac{q(x)}{q(0)}}$$

(e) Toujours, parce que $q(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\forall\, x \geqslant 0 \qquad y(x) \in \left[-\frac{\sqrt{K}}{q(0)}; \frac{\sqrt{K}}{q(0)}\right]$$

Cet intervalle est indépendant de x : /1

$$\boxed{y \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+.}$$

Remarques !

Si l'on revient sur la cas particulier, $q : x \mapsto 4$, strictement positive, croissante.

On sait que $y(x) = A\cos x + B\sin x$.

Puis on a $q(0) = 4$ et $K = y'(0)^2 + q(0)y(0)^2 = B^2 + 4A^2 \leqslant 5\max(|A|,|B|)^2$.

Donc $\dfrac{\sqrt{K}}{q(0)} = \sqrt{\frac{5}{2}}\max(|A|,|B|)$, presqu'égal au majorant de la première question...

Exercice 2 - Famille d'intégrales

Dans tout cet exercice, on considère pour tout $\alpha, \beta > -1$:

$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \mathrm{d}x$$

1. Calcul de $I_{\alpha,0}$ pour $\alpha > -1$.

   (a) Soit $\alpha \geqslant 0$. Une primitive de $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$.
   On a donc /1

$$\boxed{\forall\ \alpha \geqslant 0, I_{\alpha,0} = \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}}$$

   (b) Pour $\alpha \in]-1,0]$, $F_\alpha : x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ comme primitive de $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ sur $]0,1]$.
   Ainsi, pour tout $t \in]0,1]$:

$$\int_t^1 f_\alpha(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\alpha+1}x^\alpha + 1\right]_t^1 = \frac{1}{\alpha+1}\left(1 - t^{\alpha+1}\right) \underset{t\to 0^+}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{\alpha+1}(1-0)$$

/1,5

$$\boxed{\forall\ \alpha \in]-1,0], \qquad I_{\alpha,0} := \lim_{t\to 0} \int_t^1 f_\alpha(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}}$$

Quitte à élargir la définition de l'intégration comme précédemment,
on admet que $I_{\alpha,\beta}$ est défini lorsque $\alpha > -1$ et $\beta > -1$.

2. Relation de récurrence et valeurs entières.

   (a) Considérons $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto 1-x$.
   φ est une fonction bijective de $[0,1]$ sur $[0,1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\varphi' = -1$.
   On peut donc faire le changement de variable $u = \varphi(x)$ dans l'expression suivante :

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \mathrm{d}x = \int_1^0 (1-u)\alpha u^\beta (-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^\beta (1-u)^\alpha \mathrm{d}u = I_{\beta,\alpha}$$

/1,5

$$\boxed{\forall\ \alpha, \beta \geqslant 0, \qquad I_{\alpha,\beta} = I_{\beta,\alpha}}$$

   On suppose que le résultat reste vrai si α ou $\beta < 0$.

   (b) Première relation de récurrence.

      i. Soit $\alpha > -1$ et $\beta > 0$.
      Considérons $u : x \mapsto (1-x)^\beta$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$.
      Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
      et pour tout $x \in [0,1]$: $u'(x) = -\beta(1-x)^{\beta-1}$ et $v'(x) = x^\alpha$.
      On peut alors appliquer une intégration par parties :

$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^1 v'(x)u(x)\mathrm{d}x = [v(x)u(x)]_0^1 - \int_0^1 v(x)u'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}\left[x^{\alpha+1}(1-x)^\beta\right]_0^1 - \frac{-\beta}{\alpha+1}\int_0^1 x^{\alpha+1}x^{\beta-1}\mathrm{d}x$$

      Or $\alpha > -1$, donc $\alpha+1 > 0$, et $\left[x^{\alpha+1}\right]_.^0 = 0$ alors que $\beta > 0$, donc $\left[(1-x)^\beta\right]_.^1 = 0$. /2

$$\boxed{\forall\ \alpha > -1, \beta > 0 : \qquad I_{\alpha,\beta} = \frac{\beta}{\alpha+1}I_{\alpha+1,\beta-1}}$$

Piste de recherche...

      ii. *On peut faire une récurrence ou montrer l'invariance... Les deux marchent*
      La difficulté est qu'il y a deux variables n et m... mais en fait un seul invariant pour la question précédente : $n+m$.
      On va donc considérer k variant et étudier le lien entre $I_{n+k,m-k}$ et $I_{n+k+1,m-k-1}\cdots$

Soient $n, m \in \mathbb{N}$.

Notons, pour tout $k \in [\![0, m]\!]$, $u_k = \dfrac{I_{n+k,m-k}}{(n+k)!(m-k)!}$.

Alors pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$ (avec la formule précédente où $\alpha = n+k$, $\beta = m-k$) :

$$u_k = \frac{I_{n+k,m-k}}{(n+k)!(m-k)!} = \frac{m-k}{n+k+1} I_{n+k+1,m-k-1} \frac{1}{(n+k)!(m-k)!} = \frac{I_{n+(k+1),m-(k+1)}}{(n+(k+1))!(m-(k+1))!} = u_{k+1}$$

Alors u_k est constant et ainsi, pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$,

$$u_k = u_m = \frac{I_{n+m}}{(n+m)!0!} = \frac{1}{n+m+1}\frac{1}{(n+m)!} = \frac{1}{(n+m+1)!}$$

d'après la réponse de la question 1.(a).

Et par ailleurs, $u_0 = I_{n,m}\dfrac{1}{n!m!} = \dfrac{1}{(n+m+1)!}$ /3

$$\boxed{\text{Donc pour tous entiers } n, m \in \mathbb{N},\ I_{n,m} = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}.}$$

iii. Soient $n, m \in \mathbb{N}$.

Il s'agit de Newton : $(1-x)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k x^k$.

Alors, par linéarité de l'intégration :

$$I_{n,m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \int_0^1 (-1)^k x^{n+k} \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left[\frac{(-1)^k}{n+k+1} x^{n+k+1}\right]_0^1$$

/2

$$\boxed{\forall\, n, m \in \mathbb{N}, \qquad I_{n,m} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{n+1+k}\binom{m}{k}}$$

iv. On a donc, pour tout entier $n, m \in \mathbb{N}$:

$$n! = I_{n,m}\frac{(n+m+1)!}{m!} = \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{(-1)^k}{n+1+k} \times \frac{m!}{k!(m-k)!} \times \frac{(n+m+1)!}{m!}\right)$$

/1,5

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ et } m \in \mathbb{N} : \quad \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (n+m+1)!}{k!(m-k)!(n+1+k)} = n!}$$

(c) Seconde relation de récurrence.

i. Soient $\alpha > -1, \beta > -1$, par linéarité :

$$I_{\alpha+1,\beta} + I_{\alpha,\beta+1} = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta x \mathrm{d}x + \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta (1-x) \mathrm{d}x = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \underbrace{(x+1-x)}_{=1} \mathrm{d}x = I_{\alpha,\beta}$$

/1,5

$$\boxed{\forall\, \alpha > -1, \beta > -1 \ : \qquad I_{\alpha,\beta} = I_{\alpha+1,\beta} + I_{\alpha,\beta+1}}$$

ii. On a alors d'après la première relation de récurrence : $I_{\alpha,\beta+1} = \dfrac{\beta+1}{\alpha+1} I_{\alpha+1,\beta+1-1}$, donc /1

$$\boxed{\forall\, \alpha > -1, \beta > -1 \ : \qquad I_{\alpha,\beta} = I_{\alpha+1,\beta} + \frac{\beta+1}{\alpha+1} I_{\alpha+1,\beta} = \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+1} I_{\alpha+1,\beta}}$$

3. Valeurs demi-entières.

(a) $\psi : \theta \mapsto \sin^2\theta$ est bijective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, 1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ avec pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\psi'(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$.

On fait le changement de variables dans les deux intégrales : $x = \psi(\theta)$ et donc $1 - x = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$:

$$I_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

$$I_{-\frac{1}{2},0} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} = 2\Big[\sin\theta\Big]_0^{\pi/2} = 2$$

/2

$$\boxed{I_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \pi \qquad \text{et} \qquad I_{0,-\frac{1}{2}} = 2}$$

(b) Posons, pour tout entier $r \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}_r :\ll \ I_{-\frac{1}{2};r-\frac{1}{2}} = \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2}\pi \quad \text{et} \quad I_{-\frac{1}{2};r} = \frac{2^{2r+1}(r!)^2}{(2r+1)!} \ \gg$$

— Pour $r = 0$, on a (rappel : $0! = 1$) :

$$I_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \pi \quad \text{et} \quad \frac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}(0!)^2}\pi = \pi$$

$$I_{-\frac{1}{2},0} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{2^{2\times 0+1}(0!)^2}{(2\times 0+1)!} = 2$$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $r \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_r$ est vraie. D'après la relation 2.(c).ii.

$$I_{\alpha,\beta} = \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+1} I_{\alpha+1,\beta} \Longrightarrow I_{\alpha+1,\beta} = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} I_{\alpha,\beta}$$

Puis, par symétrie $I_{\alpha,\beta} = I_{\beta,\alpha}$, on a donc ($\beta = -\frac{1}{2}$, $\alpha = r - \frac{1}{2}$) :

$$\begin{aligned}
I_{-\frac{1}{2},r+1-\frac{1}{2}} &= \frac{r-\frac{1}{2}+1}{r-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2} I_{\frac{1}{2};r-\frac{1}{2}} = \frac{r+\frac{1}{2}}{r+1}\frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2} \\
&= \frac{2r+1}{2(r+1)} \times \frac{2r+2}{2(r+1)}\frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2} = \frac{(2r+2)!}{2^{2r+2}((r+1)!)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{-\frac{1}{2},r+1} &= \frac{r+1}{r+1-\frac{1}{2}+1} I_{-\frac{1}{2};r} = \frac{r+1}{r+\frac{3}{2}}\frac{2^{2r+1}(r!)^2}{(2r+1)!} \\
&= \frac{2(r+1)}{2r+3)} \times \frac{2(r+1)}{2r+2}\frac{2^{2r+1}(r!)^2}{(2r+1)!} = \frac{2^{2r+3}((r+1)!)^2}{(2r+3)!}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}_{r+1}$ est vérifiée. /3

$$\boxed{\forall\, r \in \mathbb{N} \quad I_{-\frac{1}{2};r-\frac{1}{2}} = \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2}\pi \quad \text{et} \quad I_{-\frac{1}{2};r} = \frac{2^{2r+1}(r!)^2}{(2r+1)!}}$$

4. Encadrement

(a) Soient $\alpha > -1$ et $,\beta' > \beta > -1$.
Pour tout $x \in [0,1]$, $\underline{(1-x) \in [0,1]}$ et donc $(1-x)^{\beta'} \leqslant (1-x)^{\beta}$.
Puis $\underline{x^\alpha \geqslant 0}$, donc $x^\alpha(1-x)^\beta \geqslant x^\alpha(1-x)^{\beta'}$.
Par croissance de l'intégration (0 < 1) : /2

$$\boxed{\forall\, \alpha > -1, \beta' > \beta > -1, \qquad I_{\alpha,\beta} \geqslant I_{\alpha,\beta'}}$$

(b) On applique cette relation pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = r$, $\beta' = r + \frac{1}{2}$ et $\beta = r - \frac{1}{2}$, $\beta' = r$:

$$I_{-\frac{1}{2},r-\frac{1}{2}} \geqslant I_{-\frac{1}{2},r} \geqslant I_{-\frac{1}{2},r+\frac{1}{2}}$$

Et par ailleurs, on a

$$I_{-\frac{1}{2},r-\frac{1}{2}} = I_{r-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{r+1}{r+\frac{1}{2}} I_{r+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{r+1}{r+\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2},r+\frac{1}{2}} = \frac{2r+2}{2r+1} I_{-\frac{1}{2},r+\frac{1}{2}}$$

Ainsi /1,5

$$\boxed{\forall\, r \in \mathbb{N}, \qquad \frac{2r+1}{2r+2} I_{-\frac{1}{2},r-\frac{1}{2}} \leqslant I_{-\frac{1}{2},r} \leqslant I_{-\frac{1}{2},r-\frac{1}{2}}}$$

(c) On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$.
Soit $r \in \mathbb{N}$,
on exploite $r! = x_r r^r e^{-r}\sqrt{r}$ et $(2r)! = x_{2r}(2r)^{2r}e^{-2r}\sqrt{2r} = x_{2r}2^{2r}r^{2r}e^{-2r}\sqrt{2r}$:

$$I_{-\frac{1}{2},r-\frac{1}{2}} = \frac{x_{2r}(2r)^{2r}e^{-2r}\sqrt{2r}}{2^{2r}[x_r r^r e^{-r}\sqrt{r}]^2}\pi = \frac{x_{2r}\sqrt{2r}}{(x_r)^2 r}\pi = \sqrt{\frac{2}{r}}\frac{x_{2r}}{x_r^2}\pi$$

$$I_{-\frac{1}{2},r} = \frac{2^{2r+1}(r!)^2}{(2r+1)\times(2r)!} = \frac{2\times 2^{2r}x_r^2 r^{2r}e^{-2r}r}{(2r+1)x_{2r}2^{2r}r^{2r}e^{-2r}\sqrt{2r}} = \sqrt{\frac{r}{2}}\frac{1}{r+\frac{1}{2}}\frac{x_r^2}{x_{2r}}$$

/2,5

$$\boxed{\forall\, r \in \mathbb{N}, \qquad I_{-\frac{1}{2},r-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{r}}\frac{x_{2r}}{x_r^2}\pi \quad \text{et} \quad I_{-\frac{1}{2},r} = \sqrt{\frac{r}{2}}\frac{1}{r+\frac{1}{2}}\frac{x_r^2}{x_{2r}}}$$

(d) Soit $r \in \mathbb{N}$. On a donc

$$\frac{I_{-\frac{1}{2},0}}{I_{-\frac{1}{2},r-\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{r}{2}}\frac{1}{r+\frac{1}{2}}\frac{x_r^2}{x_{2r}}}{\sqrt{\frac{2}{r}}\frac{x_{2r}}{x_r^2}\pi} = \frac{r}{2\pi(r+\frac{1}{2})}\frac{x_r^4}{x_{2r}^2}$$

Mais d'après l'encadrement d'une question précédente : $\frac{2r+1}{2r+2} \leqslant \frac{I_{-\frac{1}{2},0}}{I_{-\frac{1}{2},r-\frac{1}{2}}} \leqslant 1$, donc :

$$\frac{2r+1}{2r+2}\frac{\pi(2r+1)}{r} \leqslant \frac{x_r^4}{x_{2r}^2} \leqslant \frac{\pi(2r+1)}{r}$$

/2

$$\boxed{\forall\, r \in \mathbb{N}, \qquad \pi\frac{(2r+1)^2}{r(2r+2)} \leqslant \frac{x_r^4}{x_{2r}^2} \leqslant \pi\frac{2r+1}{r}}$$

(e) On note ℓ, la limite de x_n, alors :

$$\frac{x_r^4}{x_{2r}^2} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell^4}{\ell^2}$$

Par ailleurs, les termes de gauche et de droite de l'encadrement converge vers 2π car $\frac{r+\frac{1}{2}}{r} \to 1$.
Par <u>théorème d'encadrement</u> et <u>unicité de la limite</u> : $\ell^2 = 2\pi$. /2

$$\boxed{\text{Si } (x_n) \text{ converge (ce qui est le cas), } \lim(x_n) = \sqrt{2\pi}}$$

Remarques !
On a démontré la formule de Stirling :

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Exercice 3 - Fonction σ-additive

1. Croissance de $\mathbf{P}$. On suppose que $\mathbf{P}$ est σ_f-additive.

(a) $\subset$ est :
— transitif : $\forall\, A \in \mathcal{T}$, $A \subset A$.
— antisymétrique : Si A, B sont tels que $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$.
— transitif : Si A, B, C sont tels que $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$. /2

$$\boxed{\text{L'ordre n'est pas total (en tout cas si } \Omega \text{ possède au moins deux éléments).}}$$

(b) On procède par récurrence.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $\mathbf{P}(\biguplus_{k=1}^n A_k) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)$ ».
— $\mathcal{P}_1$ est vraie : $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_1)$.
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Soient $A_1, A_2, \dots A_{n+1} \in \mathcal{T}$, tous disjoints.
Alors : $\biguplus_{k=1}^{n+1} A_k = (\biguplus_{k=1}^n A_k) \biguplus A_{n+1}$.
En appliquant la σ_f-additivité, puis la propriété $\mathcal{P}_n$:

$$\mathbf{P}(\biguplus_{k=1}^{n+1} A_k) = \mathbf{P}(\biguplus_{k=1}^{n} A_k) + \mathbf{P}(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k) + \mathbf{P}(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbf{P}(A_k)$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est démontrée. /2

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{P}(\biguplus_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)}$$

(c) Soient $A, B \in \mathcal{T}$. On suppose que $A \subset B$.
On note $C = \{\omega \in B \mid \omega \notin A\} = B \setminus A$. On a alors $B = A \uplus C$.
Ainsi par σ_f-additivité :

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(C)$$

Or $\mathbf{P}$ est à valeurs dans $[0,1]$, donc $\mathbf{P}(C) \geqslant 0$ et donc $\mathbf{P}(B) \geqslant \mathbf{P}(A)$. /2

$$\boxed{\mathbf{P} \text{ est croissante de } (\mathcal{T}, \subset) \text{ vers } ([0,1], \leqslant)\text{, i.e. } \forall\, A, B \in \mathcal{T}, A \subset B \Longrightarrow \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B).}$$

(d) Soient $A, B \in \mathcal{T}$ quelconques.
On note $A' = A \setminus B = \{\omega \in A \mid \omega \notin B\}$. Et de même $B' = B \setminus A$.
Alors $A \cup B = A' \uplus B' \uplus (A \cap B)$. Donc $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A') + \mathbf{P}(B') + \mathbf{P}(A \cap P)$.
Puis, comme on a aussi $A = A' \uplus (A \cap B)$, donc $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A') + \mathbf{P}(A \cap B)$.
ainsi que $B = B' \uplus (A \cap B)$, donc $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B') + \mathbf{P}(A \cap B)$.
Alors :

$$\mathbf{P}(A \cup B) = [\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)] + [\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)] + \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$$

Or $\mathbf{P}(A \cap B) \in [0,1]$, donc $\mathbf{P}(A \cap B) \geqslant 0$. /3

$$\boxed{\mathbf{P}(A \cup B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)}$$

2. Exemples d'applications $\mathbf{P}$.

(a) On suppose ici que Ω est de cardinal fini.
On a vu en cours que pour tout $A \subset \Omega$, alors A est de cardinal fini et $\text{card}(A) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{1}_A(\omega)$.
On a aussi $0 \leqslant \mathbf{1}_A \leqslant \mathbf{1}_\Omega$ (c'est <u>l'application</u> 0 à gauche. Et en dessous, <u>le nombre</u> 0), donc

$$0 \leqslant \text{card}(A) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{1}_A(\omega) \leqslant \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{1}_\Omega(\omega) = \text{card}(\Omega)$$

Donc en divisant par $\text{card}(\Omega) > 0$ /2

$$\boxed{0 \leqslant \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \mathbf{P}_\Omega(A) \leqslant 1}$$

Soient A et $B \in \mathcal{T}$ disjoints. On a $E = A \uplus B \uplus C$ avec $C = E \setminus (A \uplus B)$

$$\begin{aligned}
\text{card}(A \cup B) &= \sum_{x \in E} \mathbf{1}_{A \cup B}(x) = \sum_{x \in A \uplus B \uplus C} \mathbf{1}_{A \cup B}(x) \\
&= \sum_{x \in A} \mathbf{1}_{A \cup B}(x) + \sum_{x \in B} \mathbf{1}_{A \cup B}(x) + \sum_{x \in C} \mathbf{1}_{A \cup B}(x) \\
&= \sum_{x \in A} 1 + \sum_{x \in B} 1 + \sum_{x \in C} 0 = \sum_{x \in A} \mathbf{1}_A(x) + \sum_{x \in B} \mathbf{1}_B(x) + 0 \\
&= \sum_{x \in E} \mathbf{1}_A(x) + \sum_{x \in E} \mathbf{1}_B(x) = \text{card}(A) + \text{card}(B)
\end{aligned}$$

Puis, en divisant par $\text{card}(\Omega) > 0$: /2

$$\boxed{\forall\, A, B \in \mathcal{T}, \mathbf{P}_\Omega(A \uplus B) = \mathbf{P}_\Omega(A) + \mathbf{P}_\Omega(B)}$$

(b) On suppose toujours que Ω est de cardinal fini. Soit $M \in \mathcal{T}$.
Soient A et $B \in \mathcal{T}$, disjoints.
Alors $(A \cap M) \cap (B \cap M) = (A \cap B) \cap M = \emptyset \cap M = \emptyset$.
Donc d'après un calcul précédent : $\text{card}((A \cap M) \uplus (B \cap M)) = \text{card}(A \cap M) + \text{card}(B \cap M)$.
Ainsi, en divisant par $\text{card}(M) > 0$ (car $M \neq \emptyset$) : /1,5

$$\boxed{\forall\, A, B \in \mathcal{T}, \mathbf{P}_M(A \uplus B) = \mathbf{P}_M(A) + \mathbf{P}_M(B)}$$

Et comme $(A \cap M) \subset M$, on a aussi $0 \leqslant \text{card}(A \cap M) \leqslant \text{card}(M)$,
alors (en divisant par $\text{card}(M) > 0$) : /1,5

$$\boxed{\mathbf{P}_M : A \mapsto \frac{\text{card}(A \cap M)}{\text{card}(M)} \text{ est à valeurs dans } [0,1].}$$

3. Variables aléatoires.

(a) — Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$. $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq X(\omega)\} = \emptyset$,
donc $\mathbf{P}\big(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq X(\omega)\}\big) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
Donc $\asymp$ est réflexive.

— Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que $X \asymp Y$.
Alors $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\} = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \neq X(\omega)\}$,
donc $Y \asymp X$.
Donc $\asymp$ est symétrique.

— Soient $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que $X \asymp Y$ et $Y \asymp Z$.
Soit $\omega \in \Omega$

$$X(\omega) = Y(\omega) \text{ et } Y(\omega) = Z(\omega) \Longrightarrow X(\omega) = Z(\omega)$$

et si on passe à la contraposée :

$$X(\omega) \neq Z(\omega) \Longrightarrow X(\omega) \neq Y(\omega) \text{ ou } Y(\omega) \neq Z(\omega)$$

cela correspond à l'inclusion d'ensembles :

$$\{\omega \mid X(\omega) \neq Z(\omega)\} \subset \{\omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\} \cup \{\omega \mid Y(\omega) \neq Z(\omega)\}$$

Puis par croissance de $\mathbf{P}$ héritée de la σ_f-additivité :

$$\mathbf{P}\big(\{\omega \mid X(\omega) \neq Z(\omega)\}\big) \leqslant \mathbf{P}\big(\{\omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\}\big) + \mathbf{P}\big(\{\omega \mid Y(\omega) \neq Z(\omega)\}\big) = 0 + 0$$

car $X \asymp Y$ et $Y \asymp Z$.
Enfin, $\mathbf{P}$ est à valeurs dans $[0, 1]$, donc $\mathbf{P}\big(\{\omega \mid X(\omega) \neq Z(\omega)\}\big) = 0$
Ainsi $X \asymp Z$.
Donc $\asymp$ est transitive. /2

$\boxed{\asymp \text{ est une relation d'équivalence sur les variables aléatoires.}}$

(b) Soient $X_1, X_2, Y_1, Y_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ quatre variables aléatoires.
Supposons que $X_1 \asymp X_2$ et $Y_1 \asymp Y_2$.

$$X_1(\omega) = X_2(\omega) \text{ et } Y_1(\omega) = Y_2(\omega) \Longrightarrow (X_1 + Y_1)(\omega) = (X_2 + Y_2)(\omega)$$

$$(X_1 + Y_1)(\omega) \neq (X_2 + Y_2)(\omega) \Longrightarrow X_1(\omega) \neq X_2(\omega) \text{ ou } Y_1(\omega) \neq Y_2(\omega)$$

$$\{\omega \mid (X_1 + Y_1)(\omega) \neq (X_2 + Y_2)(\omega)\} \subset \{\omega \mid X_1(\omega) \neq X_2(\omega)\} \cup \{\omega \mid Y_1(\omega) \neq Y_2(\omega)\}$$

$$0 \leqslant \mathbf{P}\big(\{\omega \mid (X_1+Y_1)(\omega) \neq (X_2+Y_2)(\omega)\}\big) \leqslant \mathbf{P}\{\omega \mid X_1(\omega) \neq X_2(\omega)\}) + \mathbf{P}\big(\{\omega \mid Y_1(\omega) \neq Y_2(\omega)\}\big) = 0+0 = 0$$

/2

$\boxed{\text{Si } X_1 \asymp X_2 \text{ et } Y_1 \asymp Y_2, \text{ alors } X_1 + Y_1 \asymp X_2 + Y_2.}$

(c) On suppose de nouveau que Ω est fini.
Donc il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\psi : \mathbb{N}_p \to \Omega$, bijective.
Alors $\mathbb{N}_p \to X(\Omega)$, $i \mapsto X(\psi(i))$ est surjective par composition car :
ψ est surjective et $X : \Omega \to X(\Omega)$ aussi (par définition de $X(\Omega)$).
Puis, on note pour $x \in X(\Omega)$, $m_x = \min\{i \in \mathbb{N}_p \mid X(\psi(i)) = x\} = \min\{[X(\psi) = x]\}$.
Alors $M = \{m_x, x \in X(\Omega)\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}_p$, donc de cardinal fini k.
On considère $X(\psi)_{|M} : M \to X(\Omega, i \mapsto X(\psi(i))$.
Tout x de $X(\Omega)$ a un antécédent m_x dans M, par $X(\psi)_M$. Donc $X(\psi)_{|M}$ est surjective.
Si $X(\psi)_{|M}(i) = X(\psi)_{|M}(j)$, alors $x \overset{\text{def.}}{=} X(\psi(i)) = X(\psi(j))$, donc $i = m_x = j$.
Donc $X(\psi)_{|M}$ est injective.
Ainsi il existe une bijection de M, de cardinal fini k sur $X(\Omega)$.
Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ et $\varphi : \mathbb{N}_k \to \Omega$, bijective.
On note alors, pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, $x_i = \varphi(i) \in \Omega$. $X(\Omega) = \{x_1, \dots x_k\}$ (surjectivité).
et par injectivité de φ, $x_i \neq x_j$ (donc aucun élément ne se simplifie). /2,5

$\boxed{\text{On peut donc supposer que } X(\Omega) = \{x_1, \dots x_k\}.}$

On a alors pour tout $\omega \in \Omega$

$$X(\omega) = x_k \Longleftrightarrow \mathbf{1}_{[X=x_k]}(\omega) = 1 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{k} x_k \mathbf{1}_{[X=x_k]}(\omega) = \sum_{i \neq k} x_i x_i \mathbf{1}_{[X=x_i]}(\omega) + x_k \mathbf{1}_{[X=x_k]}(\omega) = 0 + x_k \times 1 = x_k$$

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad X(\omega) = \sum_{i=1}^{k} x_k \mathbf{1}_{[X=x_k]}(\omega)$$

Donc /1,5

$$\boxed{X = \sum_{i=1}^{k} x_k \mathbf{1}_{[X=x_k]} \Rightarrow X \asymp \sum_{i=1}^{k} x_k \mathbf{1}_{[X=x_k]}}$$