

Devoir à la maison n°3 CORRECTION

Exercice 1

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$.

1. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.

Considérons $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$, alors $f(A) \cap f(B) = \{f(x)\} \cap \{f(x')\} = f(A \cap B)$.

Donc nécessairement, $A \cap B \neq \emptyset$, sinon $\{f(x)\} \cap \{f(x')\} = \emptyset$.

Ainsi $\{x\} \cap \{x'\} \neq \emptyset$ et nécessairement : $x = x'$ Donc f est injective.

si $\forall A, B \subset E, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, alors f est injective.

2. Supposons que $\exists A, B \subset E$ tels que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

On sait que $A \cap B \subset A$, donc $f(A \cap B) \subset f(A)$ et de même $f(A \cap B) \subset f(B)$.

Donc on a toujours : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Mais comme on n'a pas égalité d'ensemble, alors on n'a pas l'inclusion $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Ainsi il existe $y \in f(A) \cap f(B)$ et $y \notin f(A \cap B)$.

Donc $y \in f(A)$ et il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$

et $x \notin B$, sinon $x \in A \cap B$ et $y = f(x) \in f(A \cap B)$.

De même : $y \in f(B)$ et il existe $x' \in B$ tel que $f(x') = y$

et $x' \notin A$, sinon $x' \in A \cap B$ et $y = f(x') \in f(A \cap B)$.

On a trouvé $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$.

Ainsi f n'est pas injective.

$\exists A, B \subset E$ tels que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B) \implies f$ non injective.

3. On a démontré $\mathcal{P}_1 \implies \mathcal{P}_2$ en question 1 et $\text{NON } \mathcal{P}_1 \implies \text{NON } \mathcal{P}_2$, en question 2.

Ainsi, on a l'équivalence :

$\forall A, B \subset E, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \iff f$ est injective.

Exercice 2

Soit E un ensemble. On note, pour toutes parties A et B de E :

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$$

où $\overline{G}$ est le complémentaire de G dans E .

$A \Delta B$ est appelé la différence symétrique de A et B .

1. Déterminer $A \Delta B$ dans les deux exemples précédents :

- (a) $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 3\}$.

Dans ce cas : $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ et $A \cap B = \{1\}$

$$A \Delta B = \{2, 3\}$$

○ Remarques !

Il s'agit du cas simple le plus général, avec un élément de l'intersection, un élément qui n'appartient qu'à A , un qui n'appartient qu'à B et un qui appartient à aucun des deux.

Cela donne une excellente idée de ce qu'est $A \Delta B$.

Cela correspond à l'opération booléenne du « ou exclusif ».

- (b) $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty; 2]$ et $B = [1; +\infty[$.
 Dans ce cas : $A \cup B = \mathbb{R}$ et $A \cap B = [1; 2]$

$$A \Delta B =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$$

2. On choisit de procéder par doubles inclusions. Soit $A, B \subset E$.
 Soient $x \in A \Delta B$.

Alors $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$.

ou bien $x \in A$, alors $x \notin B$, sinon, $x \in A \cap B$, donc $x \in A \cap \overline{B}$.

ou bien $x \in B$, alors $x \notin A$, sinon, $x \in A \cap B$, donc $x \in \overline{A} \cap B$.

Donc $x \in (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$

$A \Delta B \subset (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

Réciproquement, soit $x \in (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

ou bien $x \in A \cap \overline{B}$, alors $x \notin B$ et $x \in A$ donc $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$, donc $x \in A \Delta B$.

ou bien $x \in \overline{A} \cap B$, alors $x \notin A$ et $x \in B$ donc $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$, donc $x \in A \Delta B$.

$(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \subset A \Delta B$

$$\forall A, B \subset E, \quad A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

3. Soit $A, B \subset E$. On a donc, puisque $[A \cap \overline{B}] \cap [\overline{A} \cap B] = \emptyset$:

$$\mathbf{1}_{A \Delta B} = \mathbf{1}_{A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B} = \mathbf{1}_{A \cap \overline{B}} + \mathbf{1}_{\overline{A} \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\overline{B}} + \mathbf{1}_{\overline{A}} \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_B) + (1 - \mathbf{1}_A)\mathbf{1}_B$$

$$\forall A, B \subset E, \quad \mathbf{1}_{A \Delta B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$$

4. Soit $A, B, C \subset E$. Remarquons d'abord que par symétrie de l'expression obtenue à la fin de la question précédente, on en déduit d'abord que Δ est commutatif : $A \Delta B = B \Delta A$.
 On a ensuite :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{(A \Delta B) \Delta C} &= \mathbf{1}_{A \Delta B} + \mathbf{1}_C - 2\mathbf{1}_{A \Delta B} \mathbf{1}_C = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B)\mathbf{1}_C \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C) + 4\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C \end{aligned}$$

Cette expression est symétrique en A, B et C , donc $(A \Delta B) \Delta C = (B \Delta C) \Delta A = A \Delta (B \Delta C)$, par commutativité de Δ .

$$\Delta \text{ est associative dans } \mathcal{P}(E) : \forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3, \quad (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

Exercice 3

On munit $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (ensemble des suites à valeurs dans $E = \{0, 1\}$) de l'ordre lexicographique :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \leq (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad := \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n \text{ ou } [\exists n \in \mathbb{N} \mid u_n < v_n \text{ et } \forall p < n, u_p = v_p]$$

1. • Pour toute suite (u_n) , $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n$ donc $(u_n) \leq (u_n)$.

Donc $\leq$ est réflexive.

- Soient (u_n) et (v_n) telles que $(u_n) \leq (v_n)$ et $(v_n) \leq (u_n)$.

S'il existe n tel que $u_n < v_n$ et $\forall p < n, u_p = v_p$,

alors nécessairement : on ne peut avoir $(v_n) \leq (u_n)$. Impossible

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n$. Donc $(u_n) = (v_n)$.

Donc $\leq$ est antisymétrique.

- Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) telles que $(u_n) \leq (v_n)$ et $(v_n) \leq (w_n)$.

Si $(u_n) = (v_n)$ alors nécessairement : $(u_n) = (v_n) \leq (w_n)$.

Si $(v_n) = (w_n)$ alors nécessairement : $(u_n) \leq (v_n) = (w_n)$.

Donc supposons que $(u_n) \neq (v_n)$ et $(v_n) \neq (w_n)$.

Ainsi $\exists n, m$ tels que $u_n < v_n$ et $\forall p < n, u_p = v_p$, et, $v_m < w_m$ et $\forall p < m, v_p = w_p$,

Si $n \leq m$, on a donc $\forall p < n, u_p = v_p = w_p$ et $u_n < v_n \leq w_n$.

Si $n > m$, on a donc $\forall p < m, u_p = v_p = w_p$ et $u_m = v_m < w_m$.

Dans tous les cas $(u_n) \leq (w_n)$.

Donc $\leq$ est transitive.

$$\leq \text{ est une relation d'ordre sur } E^{\mathbb{N}}.$$

Si $(u_n) \neq (v_n)$, alors $\{n \mid u_n \neq v_n\}$ est non vide, donc admet un plus petit élément n_0 .

La relation entre (u_n) et (v_n) dépend alors de la comparaison entre u_{n_0} et v_{n_0} .

$$\text{C'est une relation d'ordre total.}$$

2. On considère $\chi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow E^{\mathbb{N}}, A \mapsto \mathbf{1}_A$.

(a) $\chi(A) = \chi(A') \iff \forall x \in E, \mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_{A'}(x) \iff (x \in A \text{ ssi } x \in A') \iff A = A'$.

Donc χ est injective.

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On note $A = \{k \mid u_k = 1\}$, alors $\chi(A) = (u_n)$, par construction.

Donc χ est surjective.

χ est bijective (de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur $E^{\mathbb{N}}$).

(b) $\chi(\mathbb{N}) = \mathbf{1}_{\mathbb{N}}$, il s'agit de l'application $n \mapsto 1$, pour tout entier $\mathbb{N}$.

Soient $A, B \subset \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \chi_{A \cap B}(n) &= \mathbf{1}_{A \cap B}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \cap B \iff n \in A \text{ et } n \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{1}_A(n) = 1 \text{ et } \mathbf{1}_B(n) = 1 \\ 0 & \text{si } \mathbf{1}_A(n) = 0 \text{ ou } \mathbf{1}_B(n) = 0 \end{cases} = \mathbf{1}_A(n) \times \mathbf{1}_B(n) = [\chi(A) \times \chi(B)](n) \end{aligned}$$

χ est un morphisme de $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap)$ sur $(E^{\mathbb{N}}, \times)$.

(c) C'est classique :

$$\chi_{\bar{A}}(n) = 1 \implies n \in \bar{A} \implies n \notin A \implies \chi_A(n) = 0$$

$$\chi_{\bar{A}}(n) = 0 \implies n \notin \bar{A} \implies n \in A \implies \chi_A(n) = 1$$

$$\chi(\bar{A}) = 1 - \chi_A$$

L'un des quatre suivants se réalise nécessairement :

— $n \in A \cap B$, dans ce cas $\mathbf{1}_{A \cup B}(n) + \mathbf{1}_{A \cap B}(n) = 2 = \mathbf{1}_A(n) + \mathbf{1}_B(n)$

— $n \in A$ et $n \notin B$, dans ce cas $\mathbf{1}_{A \cup B}(n) + \mathbf{1}_{A \cap B}(n) = 1 + 0 = \mathbf{1}_A(n) + \mathbf{1}_B(n)$

— $n \notin A$ et $n \in B$, dans ce cas $\mathbf{1}_{A \cup B}(n) + \mathbf{1}_{A \cap B}(n) = 1 + 0 = 0 + 1 = \mathbf{1}_A(n) + \mathbf{1}_B(n)$

— $n \notin A \cup B$, dans ce cas $\mathbf{1}_{A \cup B}(n) + \mathbf{1}_{A \cap B}(n) = 0 = \mathbf{1}_A(n) + \mathbf{1}_B(n)$

Donc dans tous les cas $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{1}_{A \cup B}(n) = \mathbf{1}_A(n) + \mathbf{1}_B(n) - \mathbf{1}_{A \cap B}(n)$

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A) \chi(B)$$

 **Remarques !**

 On aurait également très bien pu faire un raisonnement sur les complémentaires :

$$\chi(A \cup B) = 1 - \chi(\overline{A \cup B}) = 1 - \chi(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - (1 - \chi(A))(1 - \chi(B))$$

(d) On a les équivalences ;

$$A \subset B \implies [n \in A \implies n \in B] \implies [\mathbf{1}_A(n) = 1 \implies \mathbf{1}_B(n) = 1] \iff \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$$

On a tout simplement : $\preceq_2 (= \chi(\subset))$ définie sur $E^{\mathbb{N}}$ par $(u_n) \preceq_2 (v_n)$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

C'est la relation d'ordre classique sur les suites. Elle n'est pas totale.

3. On note $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

(a) Tout nombre entier admet une décomposition en base 2.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\exists A \subset \mathbb{N}$ tel que $m = \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_A(n) 2^n = \sum_{a \in A} 2^a$ (la somme est finie).

(Pour la démonstration, on a un procédé algorithmique...)

Donc l'application D est surjective.

Par ailleurs, si $A \neq A'$. On note $\alpha = \max(A \cup A' \setminus A \cap A')$.

α existe, sinon $A \cup A' = A \cap A'$ et donc $A = A'$.

Sans perte de généralité, on peut supposer $\alpha \in A'$ (et donc $\alpha \notin A$). Alors

$$\sum_{a \in A} 2^a - \sum_{a \in A'} 2^a = -2^\alpha + \sum_{a \in A \setminus A'} 2^a - \sum_{a \in A' \setminus A} 2^a < -2^\alpha + \underbrace{\sum_{k=0}^{\alpha-1} 2^k}_{\text{pire des situations}} = -2^\alpha + (2^\alpha - 1) = -1$$

Donc $\sum_{a \in A} 2^a - \sum_{a \in A'} 2^a \neq 0$.

Ainsi l'application D est injective.

L'application $D : \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}, A \mapsto \sum_{a \in A} 2^a$ est une bijection.

(b) $D(\emptyset) = \sum_{a \in \emptyset} 2^a = 0$ Et pour tout $A, B \subset \mathbb{N}$ (finis) tels que $A \cap B = \emptyset$,

$$a \in A \cup B \iff [(a \in A \text{ et } a \notin B) \text{ ou } (a \notin A \text{ et } a \in B)].$$

D'après le théorème de sommation par paquets :

$$D(A \uplus B) = \sum_{a \in A \uplus B} 2^a = \sum_{a \in A} 2^a + \sum_{a \in B} 2^a = D(A) + D(B)$$

D est un morphisme de $(\mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \uplus)$ sur $(\mathbb{N}, +)$.

(c) Notons d'abord que pour $A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, $\sum_{a \in A} 2^a = 2^{\max(A)} + \sum_{a < \max(A)} 2^a \times \mathbf{1}_A(a)$,

$$\text{Et } \sum_{a < \max(A)} 2^a \times \mathbf{1}_A(a) \leq \sum_{a < \max(A)} 2^a \times 1 = 2^0 \frac{2^{\max(A)} - 1}{2 - 1} = 2^{\max(A)} - 1 \text{ (somme géométrique)}$$

$$\text{Donc } \sum_{a \in A} 2^a = 2^{\max(A)} + \epsilon_A \text{ avec } 0 \leq \epsilon_A < 2^{\max(A)} \text{ (de même pour } B).$$

On considère $A, B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$.

$$\begin{aligned} D(A) \leq D(B) &\iff \sum_{a \in A} 2^a \leq \sum_{b \in B} 2^b \iff 2^{\max(A)} + \epsilon_A \leq 2^{\max(B)} + \epsilon_B \\ &\implies 2^{\max(A)} \leq 2^{\max(B)} + \epsilon_B \end{aligned}$$

Si $2^{\max(B)} < 2^{\max(A)}$, alors $\max(B) < \max(A)$, donc $\max(B) + 1 \leq \max(A)$ (nombres entiers)
et donc $2^{\max(B)} + \epsilon_B < 2 \times 2^{\max(B)} = 2^{\max(B)+1} \leq 2^{\max(A)}$.

Donc nécessairement si $D(A) \leq D(B)$, alors $\max(A) \leq \max(B)$.

Mais ce n'est pas suffisant (on peut avoir $\max(A) = \max(B)$ et donc $\max(A) \leq \max(B)$ et $D(A) > D(B)$).

Notons $C = A \cap B$

et A' , le complémentaire de C dans A , i.e : $A = A' \uplus C$.

et B' , le complémentaire de C dans B , i.e : $B = B' \uplus C$.

Alors on a vu $D(A) = D(C) + D(A')$ et $D(B) = D(C) + D(B')$.

Donc $D(A) \leq D(B) \iff D(A') \leq D(B')$.

Cela implique donc $\max(A') \leq \max(B')$ ou $A' = \emptyset$.

Or $A' \cap B' = \emptyset$, donc $\max(A') \neq \max(B')$ et donc $\max(A') < \max(B')$ ou $A' = \emptyset$.

Montrons que cette condition est suffisante.

Soient $A, B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$. Supposons que $A' \neq \emptyset$ et $\max(A \setminus (A \cap B)) < \max(B \setminus (A \cap B))$.

Comme précédemment, notons $C = A \cap B$, $A' = A \setminus C$ et $B' = B \setminus C$.

$D(A) = D(C) + D(A')$ et $D(B) = D(C) + D(B')$.

Or $\max(A') < \max(B')$, donc $D(A') \leq D(B')$.

Ainsi, en additionnant $D(C)$: $D(A) \leq D(B)$.

Pour le cas ou $A' = \emptyset$, on trouve $D(A) = D(C) \leq D(C) + D(B') = D(B)$.

La relation d'ordre est : $A \preccurlyeq B$ si et seulement si $\max(A \setminus (A \cap B)) < \max(B \setminus (A \cap B))$ ou $A \cap B = A$.

C'est une relation d'ordre totale.