

Devoir à la maison n°9

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.

Problème

A. Construction de la famille de polynômes de Tchebychev

On définit la suite des polynômes de Tchebychev par $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$$

1. Construction de (T_n) .

- (a) Expliciter T_2, T_3 et T_4 .
- (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de T_n et son coefficient dominant. Quelle est la parité de T_n ?
- (c) Montrer que tous les coefficients de T_n sont des entiers relatifs.
- (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Autre expression.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$T_n(\cos x) = \cos(nx)$$

- (b) Que valent $T_n(0)$, $T_n(1)$, $T_n(-1)$?
- (c) On suppose $n \geq 1$, montrer que T_n admet n racines réelles distinctes. Les énoncer
- (d) On suppose $n \geq 2$, montrer que T'_n admet $(n-1)$ racines réelles distinctes.

B. Relation différentielle

- 1. Montrer que T_n vérifie la relation différentielle : $n^2 T_n - X T'_n + (1 - X^2) T''_n = 0$
(On pourra considérer la fonction $x \mapsto T_n(\cos x)$)
- 2. (*) En utilisant la relation précédente, exprimer les coefficients de T_n (on écrira $T_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$).

On commencera par montrer que : $\forall h \leq n, a_{h-2} = \frac{h(h-1)}{(h-2-n)(h-2+n)} a_h$,
puis on cherchera une relation entre a_{n-2p} et a_n , enfin on exprimera a_{n-2p} à l'aide de $\frac{n}{n-p} \binom{p}{n-p}$.

C. Produit scalaire

- 1. Soient $n, m \in \mathbb{N}$, deux entiers distincts. Montrer que

$$\int_0^\pi \cos(nt) \cos(mt) dt = 0$$

- 2. Produit scalaire. On note pour tout couple de polynôme (R, S) :

$$\langle R, S \rangle = \int_0^\pi R(\cos t) S(\cos t) dt$$

- (a) Montrer que, pour S fixé, l'application $R \mapsto \langle R, S \rangle$ est linéaire,
c'est-à-dire $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, R_1, R_2 \in \mathbb{R}[X] : \langle \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2, S \rangle = \lambda_1 \langle R_1, S \rangle + \lambda_2 \langle R_2, S \rangle$.
- (b) Montrer que $\langle R, S \rangle = \langle S, R \rangle$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\langle T_n, T_n \rangle = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n \geq 1 \\ \pi & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

3. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$

$$P = \frac{\langle P, T_0 \rangle}{\pi} T_0 + \sum_{k=1}^{\deg P} \frac{2\langle P, T_k \rangle}{\pi} T_k$$

D. Arithmétique des polynômes de Tchebychev

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n = 0$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $T_{n+1} \wedge T_n = 1$.
2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On note $\delta = m \wedge n$ et m_1, n_1 tels que $m = \delta m_1$, $n = \delta n_1$.
 - (a) Montrer que si m_1 et n_1 sont impairs, alors T_δ est un PGCD de T_n et T_m .
 - (b) Montrer que si l'un des deux entiers m_1 ou n_1 est pair, alors $T_n \wedge T_m = 1$.
 - (c) Que vaut finalement $T_n \wedge T_m$?