MPSI 3 - Fermat
2020-2021

Pour le 12.02.21

Devoir à la maison n°8

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la <u>précision</u> des raisonnements et l'énoncé des <u>formules utilisées</u>**.

Exercice

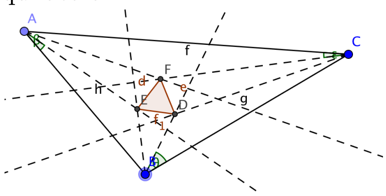
On note $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, $M(a,b)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

On notera simplement : $A = M(0,1)$ et $I = M(1,0)$.
Enfin, on note $\mathcal{F} = \{M(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

1. (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On pourra montrer que $\mathcal{F} = \text{vect}(A, I)$.
   (b) Montrer que $\mathcal{F}$ est de dimension 2.
   (c) Montrer que $\big((A+I), (A-2I)\big)$ est une base de $\mathcal{F}$.
   (d) Calculer les coordonnées de $M(a,b)$ dans cette base.
2. (a) Calculer le produit $(A+I) \times (A-2I)$.
   (b) Calculer $(A+I)^2$. Montrer alors que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $(A+I)^{n+1} = 3 \times (A+I)^n$.
   Démontrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $(A+I)^n$ s'écrit simplement.
   (c) Calculer $(A-2I)^2$.Montrer alors que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $(A-2I)^{n+1} = -3 \times (A-2I)^n$.
   Démontrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $(A-2I)^n$ s'écrit simplement.
   (d) Écrire $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, $[M(a,b)]^n$ dans cette base.
3. En déduire en particulier une forme simple de A^n (pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$)

Problème 1. Théorème de Morley

Les trisectrices sont les droites qui découpent un angle en trois angles égaux.
L'objet de ce problème est de démontrer le théorème de Morley relatif aux trisectrices d'un angle.
Pour tout points A, B, C du plan, les points D, E, F obtenus par trisection (comme sur la figure) forme un triangle équilatéral.



Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormé direct qui permet de définir l'affixe complexe d'un point et le représentant d'un nombre complexe. Les nombres complexes a, b et c sont les affixes des trois points A, B et C respectivement.
Les nombres α, β, γ sont dans $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ et tels que : $3\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ $\quad 3\beta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ $\quad 3\gamma = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$
(les angles sont orientés : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$)
On note $u = e^{2i\alpha}$, $v = e^{2i\beta}$ et $w = e^{2i\gamma}$. Enfin, on définit les transformations complexes :

$$R_a : z \mapsto u(z-a) + a \qquad R_b : z \mapsto v(z-b) + b \qquad R_c : z \mapsto w(z-c) + c$$

I. Préliminaires

1. Soient M_1, M_2 et M_3 trois points distincts du plan et d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 tels que $z_1 + jz_2 + j^2 z_3 = 0$.
   Mettre sous forme trigonométrique les trois nombres complexes : $\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$, $\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$ et $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$
   En déduire que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.
2. Montrer que uv, vw et wu sont différents de 1 et que $uvw = j$.

3. Mettre sous forme trigonométrique les deux nombres complexes : $\dfrac{u(1-v)}{1-uv}$ et $\dfrac{1-u}{1-uv}$.
4. On considère trois nombres complexes p, q et r vérifiant les relations suivantes :

   $$(1-v)b+v(1-w)c = p(1-vw) \qquad (1-w)c+w(1-u)a = q(1-wu) \qquad (1-u)a+u(1-v)b = r(1-uv)$$

   Puis on pose $E = (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p+jq+j^2r)$. Montrer que

   $$E = \frac{w}{u}j^2(u^3-1)a + \frac{u}{v}(v^3-1)b + \frac{v}{w}j(w^3-1)c$$

II. Point fixe de $R_a \circ R_b$

1. Préciser les transformations géométriques liées aux transformations complexes R_a, R_b et R_c.
2. Montrer que $R_a \circ R_b$ a un unique point fixe r, représentant le point R et vérifiant $(1-u)a + u(1-v)b = r(1-uv)$.
3. En soustrayant $(1-uv)a$ de chaque côté de la relation précédente, préciser l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$.
4. Préciser de même l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BR})$.
5. On définit de même p et P ; q et Q à partir de $R_b \circ R_c(p) = p$ et $R_c \circ R_a(q) = q$.
   Placer P, Q et R sur une figure.

III. Configuration principale de Morley

1. Montrer que le représentant de $R_c^3(a)$ est le symétrique de A par rapport à la droite (BC).
2. Montrer que $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3$ est l'identité de $\mathbb{C}$.
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, calculer $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3(z)$. En déduire

   $$(1-u^3)a + u^3(A-v^3)b + u^3v^3(1-w^3)c = 0$$

4. Montrer que le triangle PQR est équilatéral.