Devoir à la maison n°8
CORRECTION

Exercice

1. (a) Par linéarité de l'écriture de $M(a,b) = aM(1,0) + bM(0,1)$: $\mathcal{F} = \{aI + bA \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(I,A)$.

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

(b) On sait déjà que $\mathcal{F} = \text{vect}(I,A)$. Donc I et A sont générateurs de $\mathcal{F}$
De plus montrons que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants.
Soient λ, $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda I + \mu A = 0 = (M(0,0))$.
Or cette matrice nulle ne peut être obtenue que si $\lambda = \mu = 0$.
Donc (I,A) est une famille libre.

$$\boxed{(I,A) \text{ est une base de } \mathcal{F}\text{, qui est donc de dimension 2.}}$$

(c) On a donc

$$\left\{\begin{array}{lll} E_1 & = A & +I \\ E_2 & = A & -2I \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} A & = \frac{2}{3}E_1 & +\frac{1}{3}E_2 \\ I & = \frac{1}{3}E_1 & -\frac{1}{3}E_2 \end{array}\right.$$

Donc tous vecteurs de $\mathcal{F}$ s'écrit comme combinaison linéaire de E_1 et E_2 : $\mathcal{F} = \text{vect}(E_1,E_2)$.
Pour des raisons de dimension :

$$\boxed{\big((A+I),(A-2I)\big) \text{ est une base de } \mathcal{F}}.$$

(d) $A = \dfrac{1}{3}[2(A+I) + (A-2I)]$ et $I = \dfrac{1}{3}[(A+I) - (A-2I)]$.
Donc $M(a,b) = aI + bA = \dfrac{1}{3}\big[a[(A+I) - (A-2I)] + b[2(A+I) + (A-2I)]\big]$
Ainsi,

$$\boxed{M(a,b) = \frac{a+2b}{3}[A+I] + \frac{-a+b}{3}[A-2I]}$$

2. (a) $(A+I) \times (A-2I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{(A+I) \times (A-2I) = 0}$$

(b) $(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(A+I)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $(A+I)^{n+1} = (A+I)^{n-1} \times (A+I)^2 = (A+I)^{n-1} \times 3 \times (A+I) = 3(A+I)^n$.
Posons $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$:« $(A+I)^n = 3^{n-1}(A+I)$ ».
— Comme $(A+I)^1 = A+I = 3^0(A+I)$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie. (On a vu aussi pour $\mathcal{P}_2$).
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ vraie.
Alors comme $(A+I)^{n+1} = 3(A+I)^n = 3 \times 3^{n-1}(A+I)$, car $\mathcal{P}_n$ est vraie.
et donc $(A+I)^{n+1} = 3^n(A+I)$ ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie,
et la récurrence est démontrée. Ainsi,

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ :\ (A+I)^n = 3^{n-1}(A+I)}$$

(c) $(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = -3(A-2I)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $(A-2I)^{n+1} = (A-2I)^{n-1} \times \big(-3(A-2I)\big) = -3(A-2I)^n$.
Posons $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}_n$: « $(A-2I)^n = (-3)^{n-1}(A-2I)$ »
— Comme $(A-2I)^1 = A-2I = (-3)^0(A-2I)$. Donc $\mathcal{Q}_1$ est vraie. (On a vu aussi pour $\mathcal{Q}_2$).

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{Q}_n$ vraie.
Alors comme $(A-2I)^{n+1} = -3(A-2I)^n = -3 \times (-3)^{n-1}(A-2I)$, car $\mathcal{Q}_n$ est vraie.
et donc $(A-2I)^{n+1} = (-3)^n(A-2I)$ ainsi $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie,
et la récurrence est démontrée. Ainsi,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^* \ : \ (A-2I)^n = (-3)^{n-1}(A-2I)}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$, Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $\big(M(a,b)\big)^n = \left(\dfrac{a+2b}{3}[A+I] + \dfrac{-a+b}{3}[A-2I]\right)^n$
Mais comme : $(A+I)\times(A-2I) = 0 = (A-2I)\times(A+I)$, les matrices $A+I$ et $A-2I$ commutent (polynôme en A) ; on peut appliquer le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\big(M(a,b)\big)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{a+2b}{3}\right)^n (A+I)^k \times \left(\frac{-a+b}{3}\right)^n (A-2I)^{n-k}\\ &= (A+I)^n + (A-2I)^n = \left(\frac{a+2b}{3}\right)^n 3^{n-1}(A+I) + \left(\frac{a-b}{-3}\right)^n (-3)^{n-1}(A-2I)\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\big(M(a,b)\big)^n = \frac{(a+2b)^n}{3}(A+I) - \frac{(a-b)^n}{3}(A-2I)}$$

3. Enfin,

$$\boxed{A^n = [M(0,1)]^n = \frac{2^n}{3}(A+I) - \frac{(-1)^n}{3}(A-2I)}$$

Problème

I. Préliminaires

1. Soient M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 tels que $z_1 + jz_2 + j^2 z_3 = 0$.
On a alors $z_3 = j^3 z_3 = j(-z_1 - jz_2) = -jz_1 - j^2 z_2$,
donc $z_3 - z_2 = -jz_1 + (-1-j^2)z_2 = -jz_1 + jz_2$ car $1 + j + j^2 = 0$
et donc, comme $j \times j^2 = 1$:

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{z_1 - z_2}{-j(z_1 - z_2)} = \frac{1}{-j} = -j^2$$

De même pour chacun des calculs (symétries des indices)

$$\boxed{\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = -j^2}$$

Ainsi :

$$\frac{M_2M_1}{M_2M_3} = \left|\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right| = |-j^2| = 1$$

Donc le triangle $M_1M_2M_3$ est isocèle en M_2. Et

$$(\overrightarrow{M_2M_3}, \overrightarrow{M_2M_1}) \equiv \arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) \equiv \arg(-j^2) \equiv \arg(e^{i\frac{\pi}{3}}) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$$

$$\boxed{\text{Donc le triangle } M_1M_2M_3 \text{ est équilatéral.}}$$

2. $uv = \exp(2i(\alpha+\beta))$. Donc $uv \neq 1 \iff \alpha + \beta \not\equiv 0[\pi]$
Or α et $\beta \in]0, \frac{\pi}{3}[$, donc $\alpha + \beta \in]0, \frac{2\pi}{3}[$ et nécessairement : $uv \neq 1$.
De même pour vw et wu. Enfin,

$$\begin{aligned} uvw &= \exp(2i(\alpha+\beta+\gamma)) = \exp\left(\tfrac{2}{3}i[(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]\right)\\ &= \exp\left(\tfrac{2}{3}i[(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]\right)\\ &= \exp\left(\tfrac{2}{3}i(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC})\right) = \exp\left(\tfrac{2}{3}i\right) = j\end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles.

$$\boxed{uv,\ vw \text{ et } wu \text{ sont différents de 1 et } uvw = j.}$$

3. On « fait » les calculs :

$$\frac{u(1-v)}{1-uv} = \frac{e^{2i\alpha}(1-e^{2i\beta})}{1-e^{2i(\alpha+\beta)}} = \frac{e^{i(2\alpha+\beta)}(-2i\sin\beta)}{e^{i(\alpha+\beta)}(-2i\sin(\alpha+\beta))} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}e^{i\alpha}$$

(C'est bien sous forme trigonométrique : le module vaut $|\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}|$ et l'argument α ou $\alpha+\pi\ldots$)
De même

$$\frac{1-u}{1-uv} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}e^{-i\beta}$$

$$\boxed{\frac{u(1-v)}{1-uv} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}e^{i\alpha} \text{ et } \frac{1-u}{1-uv} = \frac{1-u}{1-uv} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}e^{-i\beta}}$$

4. $E = (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p+jq+j^2r)$, donc

$$\begin{aligned}
E &= (1-uv)(1-vw)(1-wu)\left[(j\frac{w(1-u)}{1-wu} + j^2\frac{1-u}{1-uv})a + (\frac{1-v}{1-vw} + j^2\frac{u(1-v)}{1-uv})b + (\frac{v(1-w)}{1-vw} + j\frac{1-w}{1-wu})c\right] \\
&= \Big[(jw(1-u)(1-uv)(1-vw) + j^2(1-u)(1-wu)(1-vw))a \\
&\quad +((1-v)(1-uv)(1-wu) + j^2(u(1-v)(1-wu)(1-vw)))b \\
&\quad +(v(1-w)(1-uv)(1-wu) + j(1-w)(1-uv)(1-vw))c\Big]
\end{aligned}$$

On va calculer le coefficient devant a, noté A est :

$$A = (jw(1-u)(1-uv)(1-vw)+j^2(1-u)(1-wu)(1-vw)) = j(1-u)(1-vw)[w(1-uv)+j(1-wu)]$$

$$A = j(1-u)(1-vw)[w-uvw+j-jwu] = j(1-u)(1-vw)w(1-ju)$$

en exploitant le fait que $uvw = j$.
Puis : $1-vw = 1-\frac{j}{u} = \frac{1}{u}(u-j) = \frac{j}{u}(j^2u-1)$ car $j^3 = 1$. Donc

$$A = \frac{j^2}{u}w(1-u)(j^2u-1)(1-ju) = \frac{j^2}{u}w(u-1)(ju-1)(j^2u-1) = \frac{j^2}{u}w(u^3-1)$$

De même devant b et c, on trouve respectivement :

$$B = \frac{u}{v}(v^3-1) \qquad C = \frac{v}{w}j(w^3-1)$$

Donc

$$\boxed{E = \frac{w}{u}j^2(u^3-1)a + \frac{u}{v}(v^3-1)b + \frac{v}{w}j(w^3-1)c}$$

II. Point fixe de $R_a \circ R_b$

1. Il s'agit d'une application directe du cours :

$$\boxed{R_a \text{ (resp. } R_b \text{ et } R_c\text{) est une rotation de centre } A \text{ (resp. } B \text{ et } C\text{) et d'angle } 2\alpha \text{ (resp. } 2\beta,\ 2\gamma\text{)}}$$

2. Soit r point fixe de $R_a \circ R_b$, alors

$$r = u[(v(r-b)+b)-a]+a = uvr - u(v-1)b - (u-1)a$$

Comme $uv \neq 1$, r est unique et $r = \dfrac{u(1-v)b+(1-u)a}{1-uv}$.

$$\boxed{R_a \circ R_b \text{ a un unique point fixe } r\text{, représentant le point } R \text{ et vérifiant } (1-u)a + u(1-v)b = r(1-uv).}$$

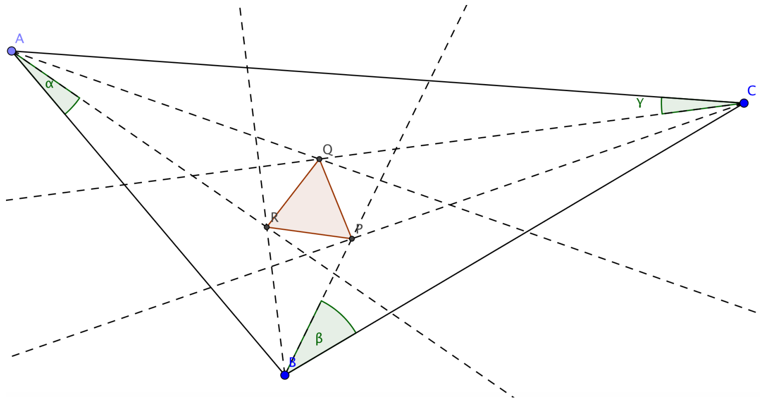
3. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR}) \equiv \arg\dfrac{r-a}{b-a}[2\pi]$.
Or $(1-uv)(r-a) = (1-u)a + u(1-v)b - (1-uv)a = u(v-1)a + u(1-v)b = u(1-v)(b-a)$.
Donc, comme $1-uv \neq 0$, d'après le calcul vu en $I.3.$:

$$\boxed{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR}) \equiv \arg\frac{u(1-v)}{1-uv} \equiv \alpha[2\pi]}$$

4. De même : $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BR}) \equiv \arg\dfrac{r-b}{a-b}[2\pi]$.
Or $(1-uv)(r-b) = (1-u)a + u(1-v)b - (1-uv)b = (1-u)a - (1-u)b = (1-u)(a-b)$.
Donc, comme $1-uv \neq 0$, d'après le calcul vu en $I.3.$

$$\boxed{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AR}) \equiv \arg\frac{1-u}{1-uv} \equiv -\beta[2\pi]}$$

5. D'après la question précédente, R est le point d'intersection des deux droites :
— (AR) qui fait un angle α avec la droite (AB) en A.
— (BR) qui fait un angle $-\beta$ avec la droite (BA) en B.
R est ainsi défini uniquement. Il en est de même pour P et Q.
Ce qui donne la représentation graphique suivante :



III. Configuration principale de Morley

1. Par composition de rotation, R_c^3 est la rotation de centre C et d'angle $3\times 2\gamma = 6\gamma = 2\times(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$
On note A', le point dont l'affixe est $R_c^3(a)$.
Alors $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}) = 2\times(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ donc $[CB)$ est la bissectrice (intérieure) de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'})$.
Puis $|AC| = |A'C|$ et donc ACA' est isocèle en C,
la bissectrice issue de C est confondue avec la médiatrice de $[AA']$ (ainsi que la médiane et la hauteur issues de C).
Donc (BC) médiatrice de $[AA']$.

$$\boxed{\text{Le représentant de } R_c^3(a) \text{ est le symétrique de } A \text{ par rapport à la droite } (BC).}$$

2. On a donc $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3(A) = R_a^3 \circ R_b^3(A')$.
Or pour les mêmes raisons qu'en question précédente, le représentant de $R_b^3(a')$ est le symétrique de A' par rapport à la droite (BC).
Il s'agit donc du point A initial et donc $R_b^3(A') = A$, puis $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3(A) = R_a^3(A) = A$
De même, $R_b^3(C)$ est le symétrique C' de C par rapport à la droite (AB) $(\ldots)$,
$R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3(C) = R_a^3 \circ R_b^3(C) = R_a^3(C') = C$
Enfin, par composition, $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3$ est une similitude,
elle possède au moins deux points fixes (A, C). C'est donc nécessairement l'identité.

$$\boxed{R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3 \text{ est l'identité de } \mathbb{C}.}$$

3. On applique la formule par composition de rotations :
$R_c^3(z) = w^3(z-c)+c$, $R_b^3(z) = v^3(z-b)+b$, $R_a^3(z) = u^3(z-a)+a$.
Donc, pout tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3(z) &= u^3([v^3([w^3(z-c)+c]-b)+b]-a)+a \\ &= (uvw)^3 z + [a(1-u^3) + bu^3(1-v^3) + cu^3v^3(1-w^3)] \end{aligned}$$

Or ceci vaut z, pour tout z, donc (on sait déjà) $(uvw)^3 = 1$ et surtout

$$\boxed{(1-u^3)a + u^3(1-v^3)b + u^3v^3(1-w^3)c = 0}$$

4. On a vu que

$$\begin{aligned} E &= \frac{w}{u} j^2(u^3-1)a + \frac{u}{v}(v^3-1)b + \frac{v}{w} j(w^3-1)c \\ &= \frac{w}{u} j^2 [(u^3-1)a + \frac{u^2}{vw} j(v^3-1)b + \frac{uv}{w^2} j^2(w^3-1)c] \end{aligned}$$

car $j^3 = 1$. Et comme $j = uvw$, on a donc

$$E = \frac{w}{u} j^2 [(u^3-1)a + u^3(v^3-1)b + (uv)^3(w^3-1)c]$$

Or d'après la question précédente, le terme entre crochet est nul, donc $E = 0$.
Or $E = (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p+jq+j^2r)$ et l'on sait que $uv \neq 1$, $vw \neq 1$ et $wu \neq 1$, donc nécessairement :

$$p + jq + j^2 r = 0$$

Et d'après la première question du devoir, cela implique que :

$$\boxed{\text{le triangle } PQR \text{ est équilatéral.}}$$