

Devoir surveillé n°6

Durée de l'épreuve : 3 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un exercice et d'un problème.

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole (*) voire (**).

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.**

BON COURAGE

Exercice

On considère un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $z \in \mathcal{Z}_P$, $-z \notin \mathcal{Z}_P$.

(On rappelle que $\mathcal{Z}_P = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid P(\alpha) = 0\}$).

1. Montrer qu'il existe $R, S \in \mathbb{C}[X]$, premiers entre eux tels que $P = R(X^2) + XS(X^2)$
2. Justifier qu'il existe $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que $AR + BS = -1$
3. On considère alors $Q = B(X^2) + XA(X^2)$. Calculer $P \times Q$. En déduire l'existence de $H \in \mathbb{C}[X]$ tel que P divise $H(X^2) - X$
4. Pour $P = X^3 + X - 1$, déterminer $\{H \in \mathbb{C}[X] \mid P \mid H(X^2) - X\}$.

Problème - Approximants de Padé par les fractions continues

Le but de ce problème est d'étudier les approximants de PADÉ, dont on trouve la définition suivante sur wikipedia :

Un approximant de PADÉ d'indice (p, q) de la fonction f désigne une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ telle que les degrés des polynômes P et Q soient inférieurs ou égaux respectivement à p et q et que $\frac{P}{Q}$ approxime f en 0 au moins à l'ordre $p + q$ (i.e. $= o(x^{p+q})$).

I. Forme normalisée et unicité de l'approximant de Padé.

/7

1. Forme normalisée.

(a) Montrer que pour tout $F \in \mathbb{K}(X)$, avec 0 qui n'est pas un pôle de F ,

il existe un unique couple $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ tel que
$$\begin{cases} - & F = \frac{A}{B} \\ - & A \wedge B = 1 \\ - & [B]_0 = 1 \end{cases}$$

On dit que $\frac{A}{B}$ est le représentant normalisé de F .

- (b) Montrer que 0 n'est pas un pôle de la fraction suivante, et l'écrire sous forme normalisée la

fraction rationnelle :
$$\frac{X^4 + 2X^2 + 1}{X^3 + 2X^2 + X + 2}$$

2. Approximant de cos à l'ordre 6.

(a) Donner le $DL_6(0)$ de la fraction normalisée $x \mapsto \frac{a + bx + cx^2}{1 + dx + ex^2}$.

- (b) Comment choisir (a, b, c, d, e) pour que $\cos(x) - \frac{a + bx + cx^2}{1 + dx + ex^2}$ soit dominés par $x \mapsto x^n$ avec n le plus grand possible.

On donnera les valeurs de a, b, c, d, e et n .

Il n'existe pas nécessairement des approximants de Padé à tout ordre. (Pour en trouver : cf. III.)

Nous pouvons néanmoins montrer qu'il ne peut, au plus, en exister qu'un seul, sous forme normalisée.

3. Supposons que $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ approche f en 0 à l'ordre $p + q$ avec $\deg P_1, \deg P_2 \leq p$, et $\deg Q_1, \deg Q_2 \leq q$. Montrer que $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$. Conclure

Dans cette partie, on développe un algorithme de division euclidienne (pour les polynômes) inversé, appelé division euclidienne selon les puissances croissantes.

1. Existence et unicité de la division selon les puissances croissantes.

Il s'agit de montrer que :

Pour tout $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B(0) \neq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

il existe un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ_n + X^{n+1}R_n$ avec $\deg Q_n \leq n$.

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On note $r = \deg A$ et $m = \deg B$

- (a) Unicité.

On suppose que $BQ_n + X^{n+1}R_n = 0$, avec $B(0) \neq 0$ et $\deg Q_n \leq n$.

Montrer que $X^{n+1} | Q_n$. En déduire la valeur de Q_n , puis de R_n .

En déduire Montrer l'unicité de la division selon les puissances croissantes.

- (b) Existence. On note $\tilde{B} = X^m B(\frac{1}{X})$. Montrer que $\tilde{B} \in \mathbb{K}[X]$. Quel est son degré ?

On rappelle que $m = \deg B$.

- (c) De même, on note $\tilde{A} = X^{n+m} A(\frac{1}{X})$. Montrer que $\tilde{A} = \tilde{A}_1 + \frac{\tilde{A}_2}{X^{r-n-m}}$ où $\tilde{A}_1$ et $\tilde{A}_2$ sont deux polynômes ($\tilde{A}_2$ pouvant être nul). Quels sont leur degré (on donnera un majorant) ?

- (d) On note $\tilde{Q}$ et $\tilde{R}$, les restes de la division euclidienne de $\tilde{A}_1$ par $\tilde{B}$.

Montrer que $\deg \tilde{Q} \leq n$.

- (e) En notant $Q_n = X^n \tilde{Q}(\frac{1}{X})$ et $R_n = X^m \tilde{R}(\frac{1}{X})$, démontrer l'existence de l'algorithme de division selon les puissances croissantes.

2. Mise en pratique.

L'exemple suivant montre la rédaction d'un exemple : la division de $A = 1 + 2X + X^3$ par $B = 1 + X + 2X^2$ à l'ordre 3.

$$\begin{array}{r} 1 \quad +2X \quad \quad \quad +X^3 \\ \quad \quad X \quad -2X^2 \quad +X^3 \\ \quad \quad \quad -3X^2 \quad -X^3 \\ \quad \quad \quad \quad 2X^3 \quad +6X^4 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 4X^4 \quad -4X^5 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 1 \quad +X \quad +2X^2 \\ 1 \quad +X \quad -3X^2 \quad +2X^3 \end{array} \right.$$

On note que la division peut ne pas s'arrêter. . .

- (a) Effectuer la division euclidienne de $7 + 8X + 10X^2 + 4X^3$ par $(1 + X + X^2)^2$ à l'ordre 4.

- (b) Effectuer la division euclidienne de $1 - aX^2$ par $1 - bX^2$ à l'ordre 6.

Retrouver la réponse de la question 1.4.

3. Exploitations.

- (a) Effectuer la division euclidienne selon les puissances croissantes de $1 - X^2$ par $1 - 2X \cos \theta + X^2$ à un ordre n quelconque.

En déduire la valeur de $1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos k\theta$ pour $\theta \neq 0[\pi]$.

- (b) Soit $P = 1 + 2X + 3X^2 + 3X^3 + 2X^4 + X^5$ et $Q = X^5$. Montrer que $P \wedge Q = 1$.

En exploitant une division euclidienne selon les puissances croissantes à un ordre bien choisis, trouver U et V tels que $UP + VQ = 1$.

Bien adaptée, lorsqu'on connaît un DL de f à l'ordre $p + q$, par l'algorithme de la division suivant les puissances croissantes, on peut trouver un candidat (P, Q) pour être un approximant de PADÉ de f .

III. Fractions continues polynomiales

On considère un second corps $\mathbb{L}$ commutatif et l'ensemble des fractions rationnelles de l'indéterminée T et définies sur ce corps : $\mathbb{L}(T)$.

A tout 4-uplet $(A, B, C, D) \in \mathbb{L}^4$ tel que $(C, D) \neq (0, 0)$ et $AD - BC \neq 0$, on associe la fraction $H_{A,B,C,D} \in \mathbb{L}(T)$ définie par

$$H_{A,B,C,D}(T) = \frac{A \times T + B}{C \times T + D}$$

1. Groupe des homographies. On note $\mathcal{G} = \{H_{A,B,C,D} \mid A, B, C, D \in \mathbb{L}, AD - BC \neq 0\}$.

- (a) Montrer que :

$$\begin{aligned} \forall (A, B, C, D), (A', B', C', D') \in \mathbb{L}^4 \text{ tel que } (C, D) \text{ et } (C', D') \neq (0, 0), \\ \exists (A'', B'', C'', D'') \in \mathbb{L}^4 \text{ tel que } H_{A,B,C,D} \circ H_{A',B',C',D'} = H_{A'',B'',C'',D''} \end{aligned}$$

On donnera les relations entre ces éléments (A'' en fonction de $A, B, C, D, A' \dots$).

Montrer que $(C'', D'') \neq (0, 0)$ et $A''D'' - B''C'' \neq 0$.

(b) Montrer que $(\mathcal{G}, \circ)$ est un groupe.

On suppose maintenant que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(X)$.

On considère deux suites. La première $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels et la seconde $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de fractions rationnelles $(M_k \in \mathbb{K}(X))$.

2. Décomposition de la fraction continue.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\exists A_n, B_n, C_n, D_n \in \mathbb{K}(X), \text{ tel que } M_0 + \frac{X^{a_0}}{M_1 + \frac{X^{a_1}}{M_2 + \frac{X^{a_2}}{\ddots + \frac{X^{a_{n-1}}}{M_n + T}}}} = H_{A_n, B_n, C_n, D_n}(T)$$

On prendra pour $H_{A_0, B_0, C_0, D_0}(T) = M_0 + T$, puis $H_{A_1, B_1, C_1, D_1}(T) = M_0 + \frac{X^{a_0}}{M_1 + T}, \dots$

(b) Comme en cours, on confond $F(t)$ avec $\tilde{F}(t)$, pour tout $t \in \mathbb{K}$.

En calculant $\lim_{t \rightarrow +\infty} H_{A_n, B_n, C_n, D_n}(t)$ puis $H_{A_n, B_n, C_n, D_n}(\frac{X^{a_n}}{M_{n+1}})$, montrer que :

$$\frac{B_{n-1}}{D_{n-1}} = \frac{A_n}{C_n} \quad \frac{B_{n+1}}{D_{n+1}} = \frac{A_n X^{a_n} + M_{n+1} B_n}{C_n X^{a_n} + P_{n+1} D_n}$$

3. Réciproquement.

On considère alors les deux suites $(P_n)_{n \geq -1}$ et $(Q_n)_{n \geq -1}$ de fractions rationnelles définies par récurrence :

$$\begin{aligned} P_{-1} &= 1, P_0 = M_0 & \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} &= M_{n+1} P_n + X^{a_n} P_{n-1} \\ Q_{-1} &= 0, Q_0 = 1 & \forall n \in \mathbb{N}, Q_{n+1} &= M_{n+1} Q_n + X^{a_n} Q_{n-1} \end{aligned}$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{K}$,

$$M_0 + \frac{X^{a_0}}{M_1 + \frac{X^{a_1}}{M_2 + \frac{X^{a_2}}{\ddots + \frac{X^{a_{n-1}}}{M_n + t}}}} = \frac{P_{n-1}t + X^{a_n} P_n}{Q_{n-1}t + X^{a_n} Q_n}$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^n X^{\sum_{i=0}^n a_i}}{Q_n Q_{n+1}}$$

4. Il existe des algorithmes naïfs ou naturels qui permettent à partir du développement limité (par exemple) d'associer à toute fonction $T = f(t)$, une suite d'entiers non nuls (M_n) et une suite d'entiers (a_n) et une suite de fonctions (g_n) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in \mathcal{D}, \quad f(t) = M_0 + \frac{t^{a_0}}{M_1 + \frac{t^{a_1}}{M_2 + \frac{t^{a_2}}{\ddots + \frac{t^{a_{n-1}}}{M_n + g(t)}}}}$$

On associe alors à f (et donc à (M_n) et (a_n)), les suites P_n et Q_n définies précédemment.

(a) Calculer $Q_n Q_{n+1}(0)$

On encadre $f(t)$ entre $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ et $\frac{P_n}{Q_n}$, pour tout n (pas facile!)

On arrive ainsi à obtenir un approximant de PADÉ (diagonale) parmi $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ ou $\frac{P_n}{Q_n}$.

(b) A suivre(...)