

Devoir surveillé n°5 CORRECTION

Problème - Convergences de suites de fonctions

Dans ce problème on s'intéresse à des suites de fonctions (φ_n) . On définit trois types de convergence :

— La convergence simple de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I , noté $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$ si :

$$\forall x \in I, \quad (\varphi_n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(x)$$

De manière équivalente :

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon$$

— La convergence uniforme de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I , noté $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon$$

— La convergence presque sûre de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I , noté $(\varphi_n) \xrightarrow{p.s.} \varphi$ si :

$$\int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid \varphi_n(x) \not\rightarrow \varphi(x)\}}(t) dt = 0$$

Préliminaires

1. On suppose que $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$.

Donc pour tout $x \in I$, $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Ainsi

$$\{x \in I \mid \varphi_n(x) \not\rightarrow \varphi(x)\} = \emptyset$$

Donc $\mathbf{1}_{\{x \in I \mid \varphi_n(x) \not\rightarrow \varphi(x)\}}$ est la fonction nulle et $\int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid \varphi_n(x) \not\rightarrow \varphi(x)\}}(t) dt = 0 : (\varphi_n) \xrightarrow{p.s.} \varphi$ /1,5

$(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi \implies (\varphi_n) \xrightarrow{p.s.} \varphi.$

Remarques !

Notons un résultat étonnant ici : $\mathbf{1}_{\{x \in I \mid \varphi_n(x) \not\rightarrow \varphi(x)\}} \geq 0$ et $\int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid \varphi_n(x) \not\rightarrow \varphi(x)\}} = 0$.

Cela n'implique pas nécessairement $\mathbf{1}_{\{x \in I \mid \varphi_n(x) \not\rightarrow \varphi(x)\}} = 0$.

Par exemple, une fonction nulle sauf en un nombre fini (voire dénombrable) de points est d'intégrale nulle.

Il n'y a donc pas unicité de la limite ici !! On peut avoir $(\varphi_n) \xrightarrow{p.s.} \varphi^1$ et $(\varphi_n) \xrightarrow{p.s.} \varphi^2$.

Dans ce cadre, on change la relation d'égalité, on dit que : $\varphi^1 \equiv \varphi^2$ ssi $\int_I (\varphi^1 - \varphi^2) = 0$

2. On suppose que $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon$$

Soit $\epsilon > 0$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon$$

Alors ce N fixé (et qui dépend en fait uniquement d' ϵ) :

$$\forall x \in I, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon$$

Donc

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in I, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon$$

Ainsi : $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$ ($\forall \epsilon > 0, \forall x \in I = \forall x \in I, \forall \epsilon > 0$)

/1,5

$(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi \implies (\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi.$

3. Soit $\epsilon > 0$ et h une fonction définie sur I .

Supposons que $\sup\{h(x), x \in I\} \leq \epsilon$.

alors pour tout $x \in I$, $h(x) \leq \sup\{h(t), t \in I\} \leq \epsilon$.

Réciproquement, supposons que pour tout $x \in I$, $h(x) \leq \epsilon$.

Alors ϵ est un majorant de $\{h(x), x \in I\}$,

donc ϵ est plus grand que le plus petit des majorants : $\sup\{h(t), t \in I\} : \sup\{h(t), t \in I\} \leq \epsilon$.

Donc : $[\forall x \in I, h(x) \leq \epsilon] \iff [\sup\{h(x), x \in I\} \leq \epsilon]$.

/2

On a donc les équivalences :

$$\begin{aligned} (\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi &\iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon \\ &\iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \sup\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|, x \in I\} \leq \epsilon \end{aligned}$$

avec $h : x \mapsto |\varphi_n(x) - \varphi(x)|$

/1

$$(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi \iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \sup\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|, x \in I\} \leq \epsilon$$

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \sup\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|, x \in I\}$.

Avec M_n , cela donne donc :

$$(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi \iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, 0 \leq M_n \leq \epsilon$$

car M_n est positif. Cela correspond exactement à la définition $(M_n) \rightarrow 0$.

/1,5

$$(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi \iff (M_n) \rightarrow 0.$$

5. Il faut trouver un moyen d'obtenir la valeur de M_n .

On le trouve en cherchant les points critiques de $|\varphi_n - \varphi|$, si cette fonction est dérivable.

/1,5

Si $t \mapsto \varphi_n - \varphi$ est dérivable,

1. On cherche la liste restreinte (et finie) des points critiques de cette fonction :

en étudiant le signe de la dérivée de $\varphi_n - \varphi$

2. Et enfin, on cherche le maximum (nombre fini) des $|\varphi_n(x_k) - \varphi(x_k)|$ pour x_k critique.

Remarques !

Il arrive souvent également qu'on étudie le signe de la dérivée seconde de $|\varphi_n - \varphi|$, pour connaître les variations de la dérivée de $|\varphi_n - \varphi|$ puis son signe...

Il s'agit d'un savoir-faire classique de seconde année. Investissez dès maintenant !

I. Etude de la convergence simple et de la convergence uniforme de suites de fonctions tendant vers exp.

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En fait, f_n est une fonction polynomiale.

/1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$

/1

$$f'_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \text{ et } f''_n(x) = \frac{n-1}{n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-2}$$

Et, par récurrence à faire par exemple pour $k \in \mathbb{N}$:

/2

$$f_n^{(k)} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-k} \mathbf{1}_{[0, n]}(k)$$

3. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on note $\ell_n = n \ln(1 + \frac{x}{n})$.

(a) Comme $t \mapsto \ln(1+t)$ est dérivable en 0 de dérivée : $\left[\frac{1}{1+t}\right]^0 = 1$.

Alors

$$1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t) - \ln(1)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$$

En prenant la suite $(\frac{x}{n})_n$ convergent vers 0, on a alors

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} = \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 + \frac{x}{n}) = \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n$$

Donc par produit :

$$\boxed{(\ell_n) \rightarrow x}$$

/2

(b) La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$, donc en x :

$$\forall (u_n) \rightarrow x \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(u_n) = \exp x$$

En particulier pour la suite (ℓ_n) :

/1

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(\ell_n) = e^x}$$

(c) Il s'agit d'une convergence pour tout réel x , donc

/1

la suite de fonctions (f_n) converge simplement (et presque sûrement) vers la fonction $f : x \mapsto e^x$.

4. Etude de la monotonie de la suite de fonctions (f_n)

(a) On fixe $n \in \mathbb{N}$. On exploite f'_n calculé précédemment :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_n(x) \geq 0 \iff \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq 0$$

- Si $n-1$ est pair, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq 0$.
- Si $n-1$ est impair, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq 0 \iff x > -n$.

Donc

/1

f_n est croissante sur $[-n, +\infty[$
et est décroissante (resp. croissante) sur $] -\infty, -n]$ si n pair (resp. impair).

(b) On fixe $x \in \mathbb{R}$.

i. On fixe $a > -1$. On peut montrer le résultat par récurrence (ou en étudiant une fonction)

$$\mathcal{P}_n : \ll \frac{1}{(1+a)^n} \geq 1 - na \gg$$

- $\frac{1}{(1+a)^0} = 1 \geq 1 - 0a$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$$\frac{1}{(1+a)^{n+1}} = \frac{1}{1+a} \frac{1}{(1+a)^n} \geq \frac{1}{1+a} (1-na)$$

d'après $\mathcal{P}_n$ et parce que $a > -1$, donc $\frac{1}{1+a} > 0$.

Or on a les équivalences :

$$\frac{1}{1+a} (1-na) \geq 1 - (n+1)a \iff 1-na \geq (1-(n+1)a)(1+a) = 1-na \underbrace{-(n+1)a^2}_{\leq 0} \iff \text{VRAI}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

/2

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1+a)^n} \geq 1 - na}$$

ii. Prenons $a = \frac{x}{n(n+1+x)}$.

Alors si $x > -n$, et donc $n+1+x > 1 > 0$, donc

/1

$$a > -1 \iff \frac{x}{n(n+1+x)} > -1 \iff x > -n(n+1+x) \iff (1+n)x > -n(n+1) \iff x > -n$$

On a donc bien $a > -1$ et on peut appliquer la formule précédent : $\frac{1}{(1+a)^n} \geq 1 - na$.

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n(n+1+x)}\right)^n} \geq 1 - \frac{x}{n+1+x} = \frac{n+1}{n+1+x}$$

Or on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &\leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \iff \left(\frac{1 + \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n+1}}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \iff \left(\frac{\frac{n+x}{n}}{\frac{n+1+x}{n+1}}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \quad /2 \\ &\iff \left(\frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)}\right)^n \leq \frac{n+1+x}{n+1} \iff \left(\frac{n(n+1)+nx+x}{n(n+1)+nx}\right)^n \leq \frac{n+1+x}{n+1} \\ &\iff \left(1 + \frac{x}{n(n+1+x)}\right)^n \leq \frac{n+1+x}{n+1} \iff \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n(n+1+x)}\right)^n} \geq \frac{n+1}{n+1+x} \end{aligned}$$

Par positivité de tous ces nombres

/1

$$\forall x > -n, \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

iii. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k > n$ (donc $-k < -n$).

pour tout $x > -n$, alors $x > -k$: $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$.

/1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_k)_{k \geq n}$ est croissante (pour l'inégalité de fonctions) sur $[-n, +\infty[$.

5. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}$.

On note également $g_n : x \mapsto f(x) - f_n(x)$.

(a) Pour tout entier n ,

$$g_n(n) = \left(1 + \frac{n}{n}\right)^n - e^n = 2^n - e^n$$

Or

$$M_n = \sup\{|g_n(x)|, x \in \mathbb{R}\} \geq |g_n(n)| = e^n - 2^n$$

/1

(b) Par conséquent, on n'a pas $(M_n) \rightarrow 0$.

/1

Donc, d'après 0.4., la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{On note } M = \frac{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - 1}{x^{n+1}} (n+1)! \text{ et considère } \varphi : t \mapsto e^x - \sum_{k=0}^n \frac{e^t}{k!} (x-t)^k + M \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(a) On commence par remarquer que :

$$\varphi : t \mapsto e^x - e^t - \sum_{k=1}^n \frac{e^t}{k!} (x-t)^k + M \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

φ est la soustraction de la fonction exponentielle et d'un polynôme, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et en particulier dérivable sur $\mathbb{R}$.

Puis, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(t) = 0 - e^t - \sum_{k=1}^n \left(\frac{e^t}{k!} (x-t)^k - \frac{e^t}{(k-1)!} (x-t)^{k-1} \right) - M \frac{(x-t)^n}{n!}$$

On voit un télescope

/2

$$\varphi'(t) = -e^t - \left(\frac{e^t}{n!} (x-t)^n - \frac{e^t}{0!} (x-t)^0 \right) - M \frac{(x-t)^n}{n!} = -\frac{(x-t)^n}{n!} e^t - M \frac{(x-t)^n}{n!}$$

$$(b) \quad \varphi(x) = e^x - e^x - \sum_{k=1}^n \frac{e^x}{k!} (x-x)^k + M \frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

$$\text{Et, comme } e^0 = 1 : \varphi(0) = e^x - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} x^k + M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\text{Et d'après la valeur de } M : \varphi(0) = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - e^x = 0. \quad /1,5$$

$$\boxed{\varphi(0) = \varphi(x) = 0}$$

(c) On peut appliquer le théorème de Rolle ($x \neq 0$) sur l'intervalle $[x, 0]$ (si $x < 0$ ou $[0, x]$ si $x > 0$).

Et donc il existe c dans cet intervalle tel que $\varphi'(c) = 0$.

Or le calcul de φ' donne :

$$\varphi'(c) = 0 = -\frac{(x-c)^n}{n!} e^c - M \frac{(x-c)^n}{n!} \Rightarrow M = -e^c$$

Et donc en reprenant l'expression de φ en remplaçant M par $-e^c$:

$$\varphi(t) = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{e^t}{k!} (x-t)^k - e^c \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Puis, en $t = 0$, comme $\varphi(0) = 0$ et $e^0 = 1$: /1,5

$$\boxed{\text{Donc il existe } c \in [0, x] \text{ (ou } [x, 0]) \text{ tel que } e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}$$

(d) On note $h_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

On se concentre sur $[a, b]$.

Notons d'abord que si $x = 0$, $h_n(x) = 1 = f(x)$.

Donc pour tout c , $|e^x - h_n(x)| = 0 = e^c \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ car $x = 0$.

Pour tout $x \in [a, b]$, $\exists c_x \in [0, x]$ (ou $[x, 0]$) tel que :

$$|e^x - h_n(x)| = e^{c_x} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or la fonction exp est croissante sur $[a, b]$, donc $e^{c_x} < e^b$, nécessairement, pour tout $x \in [a, b]$. /1
Donc

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - h_n(x)| \leq \frac{e^b b^{n+1}}{(n+1)!}$$

Et donc

$$M_n = \sup\{|f(x) - h_n(x)|, x \in [a, b]\} \leq \frac{e^b b^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or, par croissance comparée : la suite $\left(\frac{e^b b^{n+1}}{(n+1)!}\right)_n$ converge vers 0. (M_n) itou. /2

$$\boxed{\text{Pour tout intervalle } I = [a, b], \quad h_n \xrightarrow{c.u.} \exp.}$$

Remarques !

~ C'est indépendant de a et de b .

~ Et on peut prendre $a = -\infty$, dès le début.

~ En revanche, il n'est pas possible de prendre $b = -\infty \dots$

7. Soit $x > 0$.

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n n \frac{x^k}{k!} \times \frac{n!}{(n-k)!n^k}$$

Or pour tout $k \leq n$, comme $\text{card}(\llbracket n-k+1, n \rrbracket) = k$:

$$\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \prod_{h=n-k+1}^n \frac{h}{n} \leq \prod_{h=n-k+1}^n \frac{n}{n} = 1$$

Puis par multiplication avec des nombres $x \geq 0$ et addition :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \times \frac{n!}{(n-k)!n^k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \times 1 = h_n(x)$$

Puis, on a vu qu'il existe $c > 0$ tel que

$$e^x - h_n(x) = e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} > 0$$

Donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ et } x > 0 : f_n(x) \leq h_n(x) \leq e^x}$$

/3

II. Conservation de propriétés (continuité, intégration) par convergence simple ou uniforme

Dans cette partie nous étudions les propriétés induites de la suite de fonctions (φ_n) à sa limite φ par convergence simple ou par convergence uniforme.

1. Continuité et convergence simple.

(a) On considère la suite de fonctions (j_n) définie sur $[0, 1]$ par : $j_n : x \mapsto x^n$.

Pour tout $x \in [0, 1[$ (fixé) :

$$j_n(x) = x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Et $j_n(1) = 1 \rightarrow 1$.

/2

$$\boxed{\text{La limite simple de la suite } (j_n) \text{ est } j : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}}$$

(b) La fonction, j_n est un contre-exemple :

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, j_n est continue sur $[0, 1]$ (polynôme).

— La limite simple de (j_n) est j non continue sur $[0, 1]$ (non continue en 1)

/1,5

$$\boxed{\text{Si pour tout } n \in \mathbb{N}, \varphi_n \text{ est continue sur } I \text{ et } \varphi_n \xrightarrow{c.s.} \varphi, \text{ alors on n'a pas nécessairement } \varphi \text{ continue sur } I.}$$

2. Continuité et convergence uniforme.

On suppose maintenant, que $\varphi_n \xrightarrow{c.u.} \varphi$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue sur I .

On fixe $\epsilon > 0$ et $x_0 \in I$.

(a) On applique directement la définition de la convergence uniforme avec $\frac{\epsilon}{3}$.

/1

$$\boxed{\text{Il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in I, |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}.}$$

(b) Ensuite, on reprend ce N vue à la question précédente.

On applique la définition de la continuité (avec des fermés) de f_N en x_0 (avec $\frac{\epsilon}{3}$).

/1,5

$$\boxed{\text{Donc il existe } \delta_N > 0 \text{ tel que } \forall x \in [x_0 - \delta_N, x_0 + \delta_N], |\varphi_N(x) - \varphi_N(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{3}}$$

(c) Soit $x \in [x_0 - \delta_N, x_0 + \delta_N]$, par triple inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| &= |\varphi(x) - \varphi_N(x) + \varphi_N(x) - \varphi_N(x_0) + \varphi_N(x_0) - \varphi(x_0)| \\ &\leq |\varphi(x) - \varphi_N(x)| + |\varphi_N(x) - \varphi_N(x_0)| + |\varphi_N(x_0) - \varphi(x_0)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

En appliquant deux fois la question (a) (en x et x_0) et une fois la question (b)

/2

$$\boxed{\forall x \in [x_0 - \delta_N, x_0 + \delta_N], |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \epsilon}$$

(d) On a démontré que :

$$\forall x_0 \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \Leftrightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \epsilon$$

Il s'agit donc de la continuité en x_0 , pour tout x_0 de I .

/1,5

φ est donc continue sur I .

(e) Puisque la convergence uniforme permet de conserver le caractère continue et que chaque j_n est continue, mais pas $j = \lim j_n$, alors nécessairement,

/1,5

la convergence de (j_n) vers j ne peut pas être uniforme.

3. Intégration.

On considère la suite de fonctions (k_n) définie sur $[0, 1[$ par $k_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 - \frac{1}{n} \\ n & \text{si } x \geq 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$

(a) Soit $x \in [0, 1[$, et $\epsilon = \frac{1-x}{2} > 0$

La suite $(\frac{1}{n})$ converge vers 0, donc : $1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$.

$\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |1 - \frac{1}{n} - 1| < \epsilon$, donc $-\epsilon < -\frac{1}{n} < \epsilon$.

Et donc $\forall n \geq N, 1 - \frac{1}{n} > 1 - \epsilon = \frac{2 - (1-x)}{2} = \frac{1+x}{2} > x$ car $1 > x$.

Ainsi, pour tout $n \geq N, k_n(x) = 0$, puisque $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}[$.

Et donc $(k_n(x))_{n \geq N}$ converge vers 0. Donc $(k_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Cette convergence est vraie pour tout $x \in [0, 1[$.

/2

(k_n) converge simplement sur $[0, 1[$ vers une fonction $k : x \mapsto 0$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup\{|k_n(x) - k(0)|, x \in [0, 1]\} = n$ car $k_n(1 - \frac{1}{2n}) - k(1 - \frac{1}{2n}) = n - 0 = n$.
Donc (M_n) ne converge pas vers 0.

/1,5

(k_n) ne converge pas uniformément vers k sur $[0, 1[$.

(c) On note $K_n : x \mapsto \int_0^x k_n(t) dt$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

— Si $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}[$, $K_n(x) = \int_0^x k_n(t) dt = \int_0^x 0 dt = 0$.

— Si $x \geq 1 - \frac{1}{n}$, $K_n(x) = \int_0^{1-\frac{1}{n}} k_n(t) dt + \int_{1-\frac{1}{n}}^x k_n(t) dt = 0 + [nt]_{1-\frac{1}{n}}^x = nx - n + 1$

/2,5

$$K_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1) + 1 & \text{si } x \geq 1 - \frac{1}{n} \end{cases} = (n(x-1) + 1) \mathbf{1}_{[1-\frac{1}{n}, 1[}$$

C'est une fonction continue sur chaque intervalle : $[0, 1 - \frac{1}{n}[$ et $]1 - \frac{1}{n}, 1[$,

et $\lim_{x \rightarrow (1-\frac{1}{n})^+} K_n(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow (1-\frac{1}{n})^-} K_n(x)$.

/1

$\forall n \in \mathbb{N}, K_n$ est continue sur $[0, 1[$

(d) Là encore, pour x fixé dans $[0, 1[$,

il existe N tel que $\forall n \geq N, x < 1 - \frac{1}{n}$ et donc $K_n(x) = 0$.

/1

$(K_n) \xrightarrow{c.s.} k = 0_{[0,1[}$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est positive et croissante sur $[0, 1[$,

$$\sup\{|K_n(x) - k(x)|, x \in [0, 1]\} = \sup\{K_n(x), x \in [0, 1]\} = \lim_{x \rightarrow 1} K_n(x) = 1$$

Et donc $(M_n) \rightarrow 1$.

/1,5

(K_n) ne converge pas uniformément vers k .

(e) On suppose maintenant, que $\varphi_n \xrightarrow{c.u.} \varphi$ sur $[a, b]$.

Soit $\epsilon > 0$ et $\epsilon' = \frac{\epsilon}{b-a}$.

Il existe N tel que $\forall n \geq N, \forall x \in [a, b], |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon'$.

Donc $\forall n \geq N, \forall x \in [a, b], -\epsilon' \leq \varphi_n(x) - \varphi(x) \leq \epsilon'$.

En intégrant entre a et b , comme $\int_a^b \epsilon'(x)dx = \epsilon'(b-a) = \epsilon$:

Donc (linéarité de l'intégrale) $\forall n \geq N, -\epsilon \leq \int_a^b \varphi_n(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \leq \epsilon$.

Ainsi :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, \left| \int_a^b \varphi_n(t)dt - \int_a^b \varphi(t)dt \right| \leq \epsilon$$

/2,5

$$\boxed{\int_a^b \varphi_n(t)dt \longrightarrow \int_a^b \varphi(t)dt}$$

III. Théorèmes de Dini

La partie précédente a montré que la convergence uniforme (de suites de fonctions) permet d'obtenir des résultats de conservation de propriété de la suite à la limite ; ce que la convergence simple ne peut assurer.

Nous allons démontrer dans cette partie deux critères qui permet d'obtenir une convergence uniforme.

1. Critère 1. Suite de fonctions croissantes.

On suppose ici que :

— I est un segment fermé, on notera simplement $I = [a, b]$

— $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$, sur I

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est croissante sur I

— φ est continue sur I .

On désire montrer que $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$, sur I .

(a) Soient $x \leq y$ deux éléments de I .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme φ_n est croissante : $\varphi_n(x) \leq \varphi_n(y)$.

En passant à la limite (simple de fonctions) : $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.

/1,5

$$\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } I.}$$

(b) On fixe $\epsilon > 0$. La fonction φ est croissante et continue de $[a, b]$ vers $[\varphi(a), \varphi(b)]$.

Elle établit une bijection $[a, b]$ vers $[\varphi(a), \varphi(b)]$.

On peut couper l'intervalle $[\varphi(a), \varphi(b)]$ en morceaux de taille plus petite que $\frac{\epsilon}{2}$.

Par exemple : $[\varphi(a), \varphi(a) + \frac{\epsilon}{2}]$, $[\varphi(a) + \frac{\epsilon}{2}, \varphi(a) + 2\frac{\epsilon}{2}] \dots$

Notons donc m tel que $\varphi(a) + (m-1)\frac{\epsilon}{2} \leq \varphi(b) < \varphi(a) + m\frac{\epsilon}{2}$, i.e. $m = \left\lceil 2\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\epsilon} \right\rceil + 1$.

Puis, pour tout $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, $x_k = \varphi^{-1}(\varphi(a) + k\frac{\epsilon}{2})$ et $x_m = b$.

On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}_{m-1}$,

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) = \varphi(a) + k\frac{\epsilon}{2} - \varphi(a) + (k-1)\frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}$$

$$\varphi(x_m) - \varphi(x_{m-1}) = \varphi(b) - \varphi(a) - (m-1)\frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2}$$

/2,5

$$\boxed{\text{Il existe une subdivision } (x_0 = a, x_1, \dots, x_m = b) \text{ de } [a, b] \text{ telle que } \forall k \in \mathbb{N}_m, |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| \leq \frac{\epsilon}{2}}$$

(c) Soit $x \in I$.

Avec la subdivision précédente de $I = [a, b]$, il existe $k \in \mathbb{N}_m$ tel $x_{k-1} \leq x < x_k$.

On alors par croissance de φ_n et décroissance de $-\varphi$:

$$\varphi_n(x_{k-1}) - \varphi(x_k) \leq \varphi_n(x) - \varphi(x) \leq \varphi_n(x_k) - \varphi(x_{k-1})$$

Puis comme $\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) \leq \frac{\epsilon}{2}$, alors $\frac{\epsilon}{2} - \varphi(x_{k-1}) \leq -\varphi(x_k)$ et $-\varphi(x_{k-1}) \leq -\varphi(x_k) + \frac{\epsilon}{2}$: /2

$$\boxed{\varphi_n(x_{k-1}) - \varphi(x_{k-1}) - \frac{\epsilon}{2} \leq \varphi_n(x) - \varphi(x) \leq \varphi_n(x_k) - \varphi(x_k) + \frac{\epsilon}{2}}$$

(d) Les $m+1$ suites $(\varphi_n(x_k))$ converge vers $\varphi(x_k)$, par convergence simple de (φ_n) .

Donc, pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_k, |\varphi_n(x_k) - \varphi(x_k)| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

On note $N = \max(N_0, N_1, \dots, N_m)$ (ensemble fini).

Alors, pour tout $n \geq N$, pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$: $-\frac{\epsilon}{2} \leq \varphi_n(x_k) - \varphi(x_k) \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Reprenons le résultat de la question précédente,

$$\forall x \in I, \exists k \in \mathbb{N}_m \text{ tq : } \varphi_n(x_{k-1}) - \varphi(x_{k-1}) - \frac{\epsilon}{3} \leq \varphi_n(x) - \varphi(x) \leq \varphi_n(x_k) - \varphi(x_k) + \frac{\epsilon}{3}$$

Donc pour tout $n \geq N$:

$$\forall x \in I, -\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \leq \varphi_n(x) - \varphi(x) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

Finalement :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon$$

On a démontré le premier critère de Dini pour une suite de fonctions croissantes :

/2,5

La suite de fonction (φ_n) converge uniformément vers φ .

(e) On fixe $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \geq n$:

- la fonction f_k est croissante sur $[-k, +\infty[$ donc sur $[-n, n]$ ($n \leq k$),
- la suite $(f_k)_{k \geq n}$ converge simplement vers $f = \exp$,
- f est continue.

On peut appliquer ce premier théorème de Dini :

$(f_n)_{n \geq k}$ converge uniformément vers f sur $[-n, n]$.

Par indépendance avec les premiers termes, on peut affirmer :

/1,5

$\forall n \in \mathbb{N}, (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-n, n]$ ou sur tout segment de $\mathbb{R}$

car tout segment de $\mathbb{R}$ est nécessairement contenu dans un segment du type $[-n, n]$...

2. Critère 2. Suite croissante de fonctions.

On suppose ici que :

- I est un segment fermé, on notera simplement $I = [a, b]$.
- $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$, sur I
- (φ_n) est croissante : i.e. $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n et φ sont continues sur I .

On désire montrer que $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$, sur I .

(a) On note $\psi_n = \varphi - \varphi_n$. On sait que la suite φ_n est croissante donc $\psi_{n+1} - \psi_n = -\varphi_{n+1} + \varphi_n \leq 0$.
Par hypothèse, φ_n et φ sont continue donc, par addition, ψ_n est continue.

Enfin, pour tout $x \in I$, $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$, donc par soustraction : $\psi_n(x) = \varphi(x) - \varphi_n(x) \rightarrow 0$. /1,5

(ψ_n) est décroissante, continue et converge simplement vers la fonction nulle.

(b) On fixe $\epsilon > 0$. On note pour tout $\alpha < \beta \in [a, b]$,

$$\mathcal{P}_{[\alpha, \beta]} : \ll \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in [\alpha, \beta] \ 0 \leq \psi_n(x) \leq \epsilon \gg$$

On considère alors la fonction d'intervalle : $f : (\alpha, \beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{P}_{[\alpha, \beta]} \text{ faux} \\ 0 & \text{si } \mathcal{P}_{[\alpha, \beta]} \text{ vraie} \end{cases}$.

Soient $\alpha < \beta < \gamma \in [a, b]$. Supposons que $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \gamma) = 0$.

Alors $\mathcal{P}_{[\alpha, \beta]}$ et $\mathcal{P}_{[\beta, \gamma]}$ sont vraies.

Donc il existe N_1 et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

- $\forall n \geq N_1, \forall x \in [\alpha, \beta] : 0 \leq \psi_n(x) \leq \epsilon$
- $\forall n \geq N_2, \forall x \in [\beta, \gamma] : 0 \leq \psi_n(x) \leq \epsilon$

Ainsi, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, $\forall x \in [\alpha, \gamma]$, alors $0 \leq \psi_n(x) \leq \epsilon$.

Donc $\mathcal{P}_{[\alpha, \gamma]}$ est vraie et donc $f(\alpha, \gamma) = 0$.

/1,5

f est sous-additive.

(c) On suppose que $f(a, b) = 1$ (pour faire un raisonnement par l'absurde).

D'après le principe de dichotomie :

/0,5

il existe (a_n) et (b_n) adjacentes telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n, b_n) = 1$.

(d) On note $\ell = \lim(a_n) = \lim(b_n)$.

La suite $\psi_n(\ell)$ converge vers 0, puisque la suite de fonctions (ψ_n) converge simplement vers la fonction nulle. Avec $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$

/1,5

$$\boxed{\text{Il existe } N \text{ tel que } \forall n \geq N, 0 \leq \psi_n(\ell) \leq \frac{\epsilon}{2}}$$

(e) La fonction ψ_N est continue, donc en ℓ ,

$$\forall \epsilon' > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in [\ell - \delta, \ell + \delta], |\psi_N(x) - \psi_N(\ell)| \leq \epsilon'$$

Avec $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$:

/1,5

$$\boxed{\text{Il existe } \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in [\ell - \delta, \ell + \delta], |\psi_N(x) - \psi_N(\ell)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On a donc (par une sorte d'inégalité triangulaire sans valeur absolue),
pour tout $x \in [\ell - \delta, \ell + \delta]$:

$$\psi_N(x) = (\psi_N(x) - \psi_N(\ell)) + \psi_N(\ell) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Par positivité de ψ_N , on a aussi la minoration :

/2

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [\ell - \delta, \ell + \delta], 0 \leq \psi_N(x) \leq \epsilon.$$

(f) Enfin, $(a_n) \rightarrow \ell$ et $(b_n) \rightarrow \ell$.

Il existe $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq m_1, |a_n - \ell| \leq \delta$ et $\forall n \geq m_2, |b_n - \ell| \leq \delta$.

Alors avec $m = \max(m_1, m_2, N) : [a_m, b_m] \subset [\ell - \delta, \ell + \delta]$

$$\forall x \in [a_m, b_m], \quad 0 \leq \underbrace{\psi_m(x) \leq \psi_N(x)}_{(\psi_k(x))_{k \geq m \geq N}} \leq \epsilon$$

/2,5

$$\boxed{\text{Donc il existe } m \in \mathbb{N} \text{ tel que } \mathcal{P}_{[a_m, b_m]} \text{ vraie donc } f(a_m, b_m) = 0.$$

(g) On a donc trouver m tel que $f(a_m, b_m) = 0$, cela conduit à une contradiction.

Donc l'hypothèse $f(a, b) = 1$ est fausse et donc $\mathcal{P}_{[a, b]}$ est vraie. Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$.

On a démontré le second critère de Dini pour une suite croissante de fonctions :

/1

$$\boxed{(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi}$$

Remarques !

Le second critère de Dini s'applique également à la suite de fonctions (f_n) de la partie A (sur un segment), car on a également vu qu'il s'agit d'une suite croissante de fonctions.

IV. Convergence presque sûre

On considère une suite de fonction (ψ_n) définie sur I . Pour tout $\epsilon > 0$, on dit que $\psi_n(x) > \epsilon$ infiniment souvent (noté $\psi_n(x) > \epsilon$ i.s.), si

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \psi_n(x) > \epsilon\} \text{ n'est pas borné}$$

1. Soit $x \in I$ et $\epsilon > 0$.

On suppose que $\psi_n(x) > \epsilon$ infiniment souvent. Donc $E = \{n \in \mathbb{N}, \psi_n(x) > \epsilon\}$ n'est pas borné.

Nous allons construire une telle fonction θ , par récurrence.

— $(\theta(0))$

$\{n \in \mathbb{N}, \psi_n(x) > \epsilon\}E$ est non vide, inclus dans $\mathbb{N}$.

Il admet un plus petit élément. Notons le $\theta(0)$.

— $(\theta(1))$

L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq \theta(0) \text{ et } \psi_n(x) > \epsilon\}$ est également non vide,

sinon E serait borné par $\theta(0)$,

il admet un plus petit élément, noté $\theta(1)$. Nécessairement $\theta(1) \geq \theta(0)$.

— $(\theta(n) \Rightarrow \theta(n+1))$

Supposons construit $\theta(0), \theta(1) \dots \theta(k)$ éléments de E et en ordre croissant.

L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq \theta(n) \text{ et } \psi_n(x)\epsilon\}$ est également non vide,

sinon E serait borné par $\theta(n)$,

il admet un plus petit élément, noté $\theta(n+1)$. Nécessairement pour tout $k \leq n$, $\theta(n+1) \geq \theta(k)$.

Ce processus est infini (dénombrable). La fonction $\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est bien croissante et par construction, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\theta(k) > \epsilon$.

/2

Il existe θ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi_{\theta(n)}(x) > \epsilon$.

2. On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned} a \in \{x \in I \mid |\psi_n(x)| > \epsilon, \text{ i.s.}\} &\iff \{n \in \mathbb{N} \mid |\psi_n(a)| > \epsilon\} \text{ n'est pas borné} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \{r \in \mathbb{N} \mid |\psi_r(a)| > \epsilon\} \cap \llbracket n, +\infty \llbracket \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n \text{ tel que } |\psi_p(a)| > \epsilon \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n \text{ tel que } a \in \{x \mid |\psi_p(x)| > \epsilon\} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, a \in \bigcup_{p \geq n} \{x \mid |\psi_p(x)| > \epsilon\} \\ &\iff a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} \{x \mid |\psi_p(x)| > \epsilon\} \end{aligned}$$

/3

$$\left\{ x \in I \mid |\psi_n(x)| > \epsilon, \text{ i.s.} \right\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{p \geq n} \{x \in I \mid |\psi_p(x)| > \epsilon\} \right)$$

3. Commençons par quelques observations. On a par définition :

$$\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon$$

Si l'on passe au contraire, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) \not\rightarrow \varphi(x) &\iff \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \text{ et } |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon \\ &\iff \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \{n \in \mathbb{N} \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon\} \cap \llbracket N, +\infty \llbracket \neq \emptyset \\ &\iff \exists \epsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon\} \text{ n'est pas borné} \\ &\iff \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon, \text{ i.s.} \end{aligned}$$

Autre observation :

Notons que si $\epsilon' < \epsilon$, alors : $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon (> \epsilon') \implies |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon'$.

Donc par inclusion des ensembles :

$$\{x \in I \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon, \text{ i.s.}\} \subset \{x \in I \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon', \text{ i.s.}\}$$

puis comparaison des indicatrices :

$$\mathbf{1}_{\{x \in I \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon, \text{ i.s.}\}} \leq \mathbf{1}_{\{x \in I \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon', \text{ i.s.}\}}$$

et enfin croissance de l'intégrale :

$$\int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon, \text{ i.s.}\}}(t) dt \leq \int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon', \text{ i.s.}\}}(t) dt$$

Donc $\epsilon \mapsto \int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon, \text{ i.s.}\}}(t) dt$ est décroissante.

Démontrons maintenant la première équivalence :

• Supposons que $(\varphi_n) \xrightarrow{p.s.} \varphi$ sur I , alors $\int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid \varphi_n(x) \not\rightarrow \varphi(x)\}}(t) dt = 0$

Fixons $\epsilon > 0$.

$$t \in \{x \in I \mid |\psi_n(t) - \psi(t)| > \epsilon\} \implies t \in \{x \in I \mid \psi_n(x) \not\rightarrow \psi(x)\}$$

Donc, comme $A \subset B \implies \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$, on a

$$(0 \leq) \mathbf{1}_{\{x \in I \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon, \text{ i.s.}\}} \leq \mathbf{1}_{\{x \in I \mid \varphi_n(x) \not\rightarrow \varphi(x)\}}$$

Puis en intégrant sur I (intégration croissante) :

$$0 \leq \int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon, \text{ i.s.}\}}(t) dt \leq \int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid \varphi_n(x) \not\rightarrow \varphi(x)\}}(t) dt$$

Et donc $\int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon, \text{ i.s.}\}}(t) dt = 0$. Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$.

- Réciproquement, si pour tout $\epsilon > 0$, $\int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon, \text{ i.s.}\}}(t) dt = 0$.

D'après la remarque en début de question :

$$\{x \in I \mid \psi_n(x) \not\rightarrow \psi(x)\} = \bigcup_{\epsilon > 0} \{x \in I \mid |\psi_n(t) - \psi(t)| > \epsilon, \text{ i.s.}\}$$

Et pour tout $\epsilon' > 0$,

$$\bigcup_{\epsilon \geq \epsilon'} \{x \in I \mid |\psi_n(t) - \psi(t)| > \epsilon, \text{ i.s.}\} = \{x \in I \mid |\psi_n(t) - \psi(t)| > \epsilon', \text{ i.s.}\}$$

Donc on a pour tout $\epsilon' > 0$, $\int_I \mathbf{1}_{\bigcup_{\epsilon > \epsilon'} \{x \in I \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon, \text{ i.s.}\}}(t) dt = 0$.

En faisant tendre (par décroissance) ϵ' vers 0 :

$$\int_I \mathbf{1}_{\bigcup_{\epsilon > 0} \{x \in I \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon, \text{ i.s.}\}}(t) dt = 0$$

C'est donc : $\int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid \varphi_n(x) \not\rightarrow \varphi(x)\}}(t) dt = 0$

/4

$$\int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid \varphi_n(x) \not\rightarrow \varphi(x)\}}(t) dt = 0 \iff \forall \epsilon > 0, \int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon, \text{ i.s.}\}}(t) dt = 0$$

🔍 Remarques !

🔍 Avec la question précédente, on montrerait qu'on a également l'équivalence :

🔍
$$\int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid \varphi_n(x) \not\rightarrow \varphi(x)\}}(t) dt = 0 \iff \forall \epsilon > 0, \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_I \mathbf{1}_{\{\exists n \geq N \text{ tel que } |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon\}}(t) dt = 0$$