

Devoir surveillé n°5

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un unique problème sur l'étude des différentes convergences de suites de fonctions.

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole (*) voire (**).

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Problème - Convergences de suites de fonctions

Dans ce problème on s'intéresse à des suites de fonctions (φ_n) . On définit trois types de convergence :

— La convergence simple de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I , noté $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$ si :

$$\forall x \in I, \quad (\varphi_n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(x)$$

De manière équivalente :

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon$$

— La convergence uniforme de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I , noté $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon$$

— La convergence presque sûre de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I , noté $(\varphi_n) \xrightarrow{p.s.} \varphi$ si :

$$\int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid \varphi_n(x) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(x)\}}(t) dt = 0$$

On commence par quelques questions intermédiaires qui aboutissent sur un savoir-faire sous forme d'une question ouverte.

Puis, dans la partie I, on étudie, en particulier, deux suites de fonctions convergentes vers $\exp$, afin de se familiariser avec ces différents types de convergence.

Dans la partie II, on étudie comment certaines propriétés se propagent (ou non) de la suite des fonctions à la limite.

Dans la partie III, on donne deux critères pour obtenir la convergence uniforme.

Enfin, en partie IV, on donne un critère équivalent à la convergence presque sûre.

Préliminaires

/7

1. Montrer que si $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$, alors $(\varphi_n) \xrightarrow{p.s.} \varphi$.
2. Montrer que si $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$, alors $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$.
3. Montrer que $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \sup\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|, x \in I\} \leq \epsilon$$

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \sup\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|, x \in I\}$.
En déduire que $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$ si et seulement si $(M_n) \rightarrow 0$.
5. Connaissez-vous une façon simple d'obtenir la valeur de M_n (on donnera les hypothèses nécessaires vérifiées par φ_n et φ) ?
En déduire un protocole, que vous rédigez, pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions.

I. Etude de la convergence simple et de la convergence uniforme de suites de fonctions tendant vers exp

/29

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer f'_n et f''_n .

Exprimer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}$.

3. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on note $\ell_n = n \ln(1 + \frac{x}{n})$.

(a) En exploitant la règle de L'Hospital à $t \mapsto \ln(1 + t)$ pour $t \rightarrow 0$, montrer que (ℓ_n) converge.

(b) En déduire que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f : x \mapsto e^x$.

(c) Quelle type de convergence en déduit-on concernant la suite de fonctions (f_n) ?

4. Etude de la monotonie de la suite de fonctions (f_n)

(a) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction f_n est croissante sur $[-n, +\infty[$.

Quelles sont les variations de f_n sur $] -\infty, -n]$?

(b) On fixe $x \in \mathbb{R}$.

i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe $a > -1$. Montrer que $\frac{1}{(1+a)^n} \geq 1 - na$

ii. En prenant $a = \frac{x}{n(n+1+x)}$, montrer que :

$$\forall x > -n, \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

iii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions $(f_k)_{k \geq n}$ est croissante (pour l'inégalité de fonctions) sur $[-n, +\infty[$.

5. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}$.

On note également $g_n : x \mapsto f(x) - f_n(x)$.

(a) Calculer $g_n(n)$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n \geq e^n - 2^n$.

(b) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}$?

6. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $M = \frac{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - e^x}{x^{n+1}} (n+1)!$ et considère $\varphi : t \mapsto e^x - \sum_{k=0}^n \frac{e^t}{k!} (x-t)^k + M \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$.

(a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t)$.

(b) Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(x)$.

(c) En déduire qu'il existe $c \in [0, x]$ (ou $[x, 0]$) tel que $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$.

(d) On note $h_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

Montrer que pour tout intervalle $I = [a, b]$, $h_n \xrightarrow{c.u.} f$ (on rappelle : $f : x \mapsto e^x$).

7. Comparaison de f_n et h_n .

En exploitant le binôme de Newton, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $x > 0$:

$$f_n(x) \leq h_n(x) \leq e^x$$

II. Conservation de propriétés (continuité, intégration) par convergence simple ou uniforme

/23

Dans cette partie nous étudions les propriétés induites de la suite de fonctions (φ_n) à sa limite φ par convergence simple ou par convergence uniforme.

1. Continuité et convergence simple.

(a) On considère la suite de fonctions (j_n) définie sur $[0, 1]$ par : $j_n : x \mapsto x^n$.

Quelle est le limite simple de la suite (j_n) , notée j et définie sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue sur I et $\varphi_n \xrightarrow{c.s.} \varphi$, alors on n'a pas nécessairement φ continue sur I .

2. Continuité et convergence uniforme.

On suppose maintenant, que $\varphi_n \xrightarrow{c.u.} \varphi$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue sur I .
On fixe $\epsilon > 0$ et $x_0 \in I$.

- Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \forall x \in I, |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}$.
- Pourquoi existe-t-il $\delta_N > 0$ tel que $\forall x \in [x_0 - \delta_N, x_0 + \delta_N], |\varphi_N(x) - \varphi_N(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{3}$?
- En exploitant une (triple) inégalité triangulaire, montrer que
 $\forall x \in [x_0 - \delta_N, x_0 + \delta_N], |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \epsilon$.
- Quelle propriété de φ a ainsi été démontrée?
- Que peut-on dire concernant la convergence uniforme de la suite (j_n) définie à la question précédente?

3. Intégration.

On considère la suite de fonctions (k_n) définie sur $[0, 1[$ par $k_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 - \frac{1}{n} \\ n & \text{si } x \geq 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$

- Montrer que (k_n) converge simplement sur $[0, 1[$ vers une fonction k que l'on donnera.
- Montrer que (k_n) ne converge pas uniformément vers k sur $[0, 1[$.

- On note $K_n : x \mapsto \int_0^x k_n(t)dt$. Exprimer $K_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1[$.
 K_n est-elle continue?

- Etudier la limite simple de K_n . La suite (K_n) converge t-elle uniformément?

- On suppose maintenant, que $\varphi_n \xrightarrow{c.u.} \varphi$ sur $[a, b]$.

Montrer que $\int_a^b \varphi_n(t)dt \longrightarrow \int_a^b \varphi(t)dt$

III. Théorèmes de Dini

/22

La partie précédente a montré que la convergence uniforme (de suites de fonctions) permet d'obtenir des résultats de conservation de propriété de la suite à la limite; ce que la convergence simple ne peut assurer.

Nous allons démontrer dans cette partie deux critères qui permet d'obtenir une convergence uniforme.

1. Critère 1. Suite de fonctions croissantes.

On suppose ici que :

- I est un segment fermé, on notera simplement $I = [a, b]$
- $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$, sur I
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est croissante sur I
- φ est continue sur I .

On désire montrer que $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$, sur I .

- Montrer que φ est croissante.
- On fixe $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe une subdivision $(x_0 = a, x_1, \dots, x_m = b)$ de $[a, b]$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}_m, \quad |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

- Soit $x \in I$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}_m$ tel que :

$$\varphi_n(x_{k-1}) - \varphi(x_{k-1}) - \frac{\epsilon}{2} \leq \varphi_n(x) - \varphi(x) \leq \varphi_n(x_k) - \varphi(x_k) + \frac{\epsilon}{2}$$

- Conclure
- Peut-on appliquer ce critère pour la suite de fonctions (f_n) définie en partie I sur tout segment de $\mathbb{R}$?

2. Critère 2. Suite croissante de fonctions.

On suppose ici que :

- I est un segment fermé, on notera simplement $I = [a, b]$.
- $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$, sur I
- (φ_n) est croissante : i.e. $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n et φ sont continues sur I .

On désire montrer que $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$, sur I .

- On note $\psi_n = \varphi - \varphi_n$. Montrer que (ψ_n) est décroissante, continue et converge simplement vers la fonction nulle.

(b) On fixe $\epsilon > 0$. On note pour tout $\alpha < \beta \in [a, b]$,

$$\mathcal{P}_{[\alpha, \beta]} : \ll \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in [\alpha, \beta] \ 0 \leq \psi_n(x) \leq \epsilon \gg$$

On considère alors la fonction d'intervalle : $f : (\alpha, \beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{P}_{[\alpha, \beta]} \text{ faux } \\ 0 & \text{si } \mathcal{P}_{[\alpha, \beta]} \text{ vraie } \end{cases}$.

Montrer que f est sous-additive.

(c) Si $f(a, b) = 1$, montrer qu'il existe (a_n) et (b_n) adjacentes telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n, b_n) = 1$.

(d) On note $\ell = \lim(a_n) = \lim(b_n)$. Montrer qu'il existe N tel que $\forall n \geq N$, $0 \leq \psi_n(\ell) \leq \frac{\epsilon}{2}$

(e) Montrer également qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [\ell - \delta, \ell + \delta]$, $|\psi_N(x) - \psi_N(\ell)| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

En déduire que pour tout $x \in [\ell - \delta, \ell + \delta]$, $0 \leq \psi_N(x) \leq \epsilon$.

(f) Montrer ainsi qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(a_m, b_m) = 0$.

(g) Conclure

IV. Convergence presque sûre

/9

On considère une suite de fonction (ψ_n) définie sur I .

Pour tout $\epsilon > 0$, on dit que $\psi_n(x) > \epsilon$ infiniment souvent (noté : $\psi_n(x) > \epsilon$, i.s.), si

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \psi_n(x) > \epsilon\} \text{ n'est pas borné}$$

1. Soit $x \in I$ et $\epsilon > 0$.

Montrer que si $\psi_n(x) > \epsilon$ infiniment souvent, alors il existe $\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi_{\theta(n)}(x) > \epsilon$.

2. Montrer que

$$\{x \in I \mid |\psi_n(x)| > \epsilon, \text{ i.s.}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{p \geq n} \{x \in I \mid |\psi_p(x)| > \epsilon\} \right)$$

3. Montrer que $(\varphi_n) \xrightarrow{p.s.} \varphi$ sur I

$$\text{si et seulement si } \forall \epsilon > 0, \int_I \mathbf{1}_{\{x \in I \mid |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \epsilon, \text{ i.s.}\}}(t) dt = 0$$