 Le 07.01.21

Devoir à la maison n°6
CORRECTION

Exercice 1

1. On pose $u = x^2 + x^3$, on a $u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Et $\dfrac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + o(u^4)$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2-x^3} &\underset{x\to 0}{=} 1 + (x^2+x^3) + (x^2+x^3)^2 + (x^2+x^3)^3 + (x^2+x^3)^4 + o((x^2)^4)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + x^6 + x^6 + 3x^7 + o(x^7)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + o(x^7)\end{aligned}$$

Au voisinage de 1, on note $t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1$ et on a $t \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$

$$\frac{1}{1-x^2-x^3} = \frac{1}{1-(t+1)^2-(t+1)^3} = \frac{1}{-1-5t-4t^2-t^3} = \frac{-1}{1+5t+4t^2+t^3}$$

On pose alors $u = 5t + 4t^2 + t^3$, on a $u \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$.
Et $\dfrac{-1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} -(1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 + u^6 - u^7 + o(u^7))$.

$$\begin{aligned}\frac{-1}{1+5t+4t^2+t^3} &\underset{t\to 0}{=} -1 + (5t+4t^2+t^3) - (5t+4t^2+t^3)^2 + (5t+4t^2+t^3)^3 - (5t+4t^2+t^3)^4\\ &\qquad + (5t+4t^2+t^3)^5 - (5t+4t^2+t^3)^6 + (5t+4t^2+t^3)^7 + o(t^7)\\ &\underset{t\to 0}{=} -1 + (5t+4t^2+t^3) - (25t^2 + 40t^3 + (16+10)t^4 + 8t^5 + t^6)\\ &\qquad + (125t^3 + 300t^4 + (240+75)t^5 + (120+64)t^6 + (15+48)t^7)\\ &\qquad - (625t^4 + 2000t^5 + (500+2400)t^6 + (1200+1280)t^7)\\ &\qquad + (3125t^5 + 12\,500t^6 + (3125 + 20\,000)t^7)\\ &\qquad - (15\,625t^6 + 75\,000t^7) + 78\,125t^7 + o(t^7)\\ &\underset{x\to 0}{=} -1 + 5t - 21t^2 + 86t^3 - 351t^4 + 1432t^5 - 5842t^6 + 23833t^7\end{aligned}$$

On trouve donc les développements limitées :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2-x^3} &\underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + o(x^7)\\ \frac{1}{1-x^2-x^3} &\underset{x\to 1}{=} -1 + 5(x-1) - 21(x-1)^2 + 86(x-1)^3 - 351(x-1)^4 + 1432(x-1)^5\\ &\qquad -5\,842(x-1)^6 + 23\,833(x-1)^7 + o((x-1)^7)\end{aligned}}$$

2. Développement asymptotique.
   (a) Soient $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$.
   Soit $x > 0$,

$$\frac{x^\alpha(\ln x)^\beta}{x^{\alpha'}(\ln x)^{\beta'}} = x^{\alpha-\alpha'}(\ln x)^{\beta-\beta'} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \alpha - \alpha' < 0 \text{ ou } [\alpha - \alpha' = 0 \text{ et } \beta - \beta' < 0]$$

$$\boxed{x^\alpha(\ln x)^\beta = o\left(x^{\alpha'}(\ln x)^{\beta'}\right) \text{ au voisinage de } +\infty \iff \alpha < \alpha' \text{ ou } [\alpha = \alpha' \text{ et } \beta < \beta' < 0]}$$

   (b) On a $F_1(x) = \exp(\frac{\ln(1+x)}{x^2})$.
   Pour $x \to +\infty$,
   — $\ln(1+x) \to +\infty$, comme $\ln x$, on factorise donc par x :

$$\ln(1+x) = \ln(x(1+\frac{1}{x})) = \ln x + \ln(1+\frac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{=} \ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + o(\frac{1}{x^4})$$

   — $\frac{1}{x^2} \to 0$, et $u = \frac{\ln(1+x)}{x^2} \to 0$

$$\exp u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + o(u^4)$$

Par composition (avec $u(x)=\frac{\ln(1+x)}{x^2}$) :

$$\begin{aligned}
F_1(x) &\underset{x\to+\infty}{=} 1+u+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{6}u^3+\frac{1}{24}u^4+o(u^4)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} 1+\underbrace{\frac{1}{x^2}\left(\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{4x^4}+o(\frac{1}{x^4})\right)}_{=u}+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{6}u^3+\frac{1}{24}u^4+o(u^4)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} 1+\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{2x^4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^3+o\left(\frac{1}{x^4}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{F_1(x)\underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{(\ln x)^2}{2x^4}-\frac{1}{2x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)}$$

(c) Au voisinage de $+\infty$:

$$\ln(1+x)=\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{=}\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

On factorise par $\ln x$

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^\alpha\underset{x\to+\infty}{=}\left(1+\frac{1}{x\ln x}-\frac{1}{2x^2\ln x}+\frac{1}{3x^3\ln x}+o\left(\frac{1}{x^3\ln x}\right)\right)^\alpha\underset{x\to+\infty}{=}\left(1+\frac{1}{x\ln x}-\frac{1}{2x^2\ln x}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^\alpha$$

En posant $v=\frac{1}{x\ln x}-\frac{1}{2x^2\ln x}+o\left(\frac{1}{x^3\ln x}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^\alpha &\underset{x\to+\infty}{=}(1+v)^\alpha=1+\alpha v+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}v^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}v^3+o\left(\frac{1}{v^3}\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=}1+\alpha\left(\frac{1}{x\ln x}-\frac{1}{2x^2\ln x}\right)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(\frac{1}{x\ln x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=}1+\alpha\frac{1}{x\ln x}-\frac{\alpha}{2}\frac{1}{x^2\ln x}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{1}{(x\ln x)^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)
\end{aligned}$$

Et comme $\dfrac{1+x}{x}=1+\dfrac{1}{x}$, on trouve par produit :

$$F_2(x)\underset{x\to+\infty}{=}1+\alpha\frac{1}{x\ln x}-\frac{\alpha}{2}\frac{1}{x^2\ln x}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{1}{(x\ln x)^2}+\frac{1}{x}+\alpha\frac{1}{x^2\ln x}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\boxed{F_2(x)\underset{x\to+\infty}{=}1+\frac{1}{x}+\alpha\frac{1}{x\ln x}+\frac{\alpha}{2}\frac{1}{x^2\ln x}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{1}{(x\ln x)^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

Exercice 2

Faire une carte mentale des propriétés algébriques, comparant $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{K}[X]$.
(Avec les implications, les équivalences...On commencera pas noter l'existence d'une division euclidienne...)

Exercice 3

On considère le corps $\mathbb{K}$.
Soient $P_1,\dots P_k$, k polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux.
Soient $R_1,\dots R_k$, k autres polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

1. Les polynômes $P_1,P_2,\dots P_k$ sont premiers entre eux deux à deux,

   On note $P=\displaystyle\prod_{i=1}^k P_i$. Pour tout $i\in\mathbb{N}_k$, P_i divise P.

   On note alors pour tout $i\in\mathbb{N}_k$, $M_i=\dfrac{P}{P_i}$.

   Fixons $i\in\mathbb{N}_k$.

   Pour tout $j\neq i$, comme $P_j\wedge P_i=1$, alors $\displaystyle\prod_{j\neq i}P_j\wedge P_i=1$.

Or $\prod_{j\neq i} P_j = M_i$. Donc $M_i \wedge P_i = 1$.

Il existe donc $U_i, V_i \in \mathbb{K}[X]$ tels que $U_iM_i + V_iP_i = 1$ (Bézout).

Notons par ailleurs que si $j \neq i$, $P_j | M_i$, donc $U_iM_i \equiv 0[P_j]$.

Alors que $U_iM_i = 1 - V_iP_i \equiv 1[P_i]$.

Relâchons le caractère fixé de i.

Considérons maintenant $S \in \{T \in \mathbb{K}[X] \text{ tq } \forall\, i \in \mathbb{N}_k, T \equiv R_i[P_i]\}$.

Puis $R = S - \sum_{i=1}^{k} U_iM_iR_i$. On a alors (par linéarité) pour tout $j \in \mathbb{N}_k$:

$$R \equiv R_j - \sum_{i\neq j} 0 + 1R_j \equiv 0[P_j]$$

Donc $P_j|R$. Par lemme de Gauss, puisque les polynômes sont premiers deux à deux :

$$\prod_{j=1}^{k} P_j | R$$

Il existe donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $R = Q\prod_{j=1}^{k} P_j$, ie $S = Q\prod_{j=1}^{k} P_j + \sum_{i=1}^{k} U_iM_iR_i$.

Réciproquement, si $S = Q\prod_{j=1}^{k} P_j + \sum_{i=1}^{k} U_iM_iR_i$, alors

$$S \equiv 0 + 0 + R_j = R_j \quad [P_j]$$

$$\boxed{\Big\{T \in \mathbb{K}[X] \text{ tq } \forall\, i \in \mathbb{N}_k, T \equiv R_i[P_i]\Big\} = \left\{\sum_{i=1}^{k} U_iM_iR_i + Q\prod_{j=1}^{k} P_j ; Q \in \mathbb{K}[X]\right\}}$$

2. En prenant pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, $P_i = (X - x_i)$ et $R_i = y_i$ constant,
   on est dans les conditions du théorème de Lagrange.
   Et ici, les polynômes P_i sont bien premier entre eux deux à deux si $x_i \neq x_j$, dès que $i \neq j$.
   Ensuite, $M_i = \prod_{j\neq i}(X - x_j)$, premier avec $(X - x_i)$.
   La division euclidienne de M_i par P_i donne : $M_i = Q_iP_i + R_i$ avec $\deg R_i < \deg P_1 = 1$.
   Donc R_i est une constante, nécessairement non nul car P_i ne divise pas M_i.
   Notons r_i cette constante. En prenant la valeur en x_i, qui annule P_i, on a :

$$M_i(x_i) = 0 + r_i \Longrightarrow r_i = \prod_{j\neq i} P_j(x_i)$$

   L'identité de Bézout est $\frac{1}{r_i}M_i - \frac{1}{r_i}Q_iP_i = 1$ On peut prendre enfin

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{r_i}M_i + Q\prod_{j=1}^{n}(X - x_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{j\neq i} \frac{P_j}{P_j(r_i)} + Q\prod_{j=1}^{n}(X - x_j)}$$

3. On considère une matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^4 - X^3 - X^2 + X$

   (a) P est factorisable par X et admet 1 en racine évidente. Puis par factorisation

$$\boxed{P = X(X-1)^2(X+1)}$$

   Factoriser P

   (b) $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\boxed{P(M) = M^4 - M^3 - M^2 + M = 0}$$

(c) Pour ne pas faire de confusion sur X, on note ici T, l'indeterminé des polynômes. On note pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$\text{Ker } N = \left\{ U = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid NU = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \right\}$$

On note $P_1(T) = T$, $P_2(T) = (T+1)$ et $P_3(T) = (T-1)^2$.
Ces polynômes sont premiers entre eux deux à deux.
Il existe S_1, S_2 et S_3 tel que pour tout $i, j \in \mathbb{N}_3$: $S_i \equiv \delta_{i,j}[P_j]$.
On a vu qu'on a $S_i = U_i M_i$ où $M_i = \prod_{j \neq i} P_j$. Donc $P_i M_i = P$.
Considérons alors le polynôme $S = S_1 + S_2 + S_3 - 1$.
Alors $S \equiv 1 + 0 + 0 - 1 = 0[P_1]$, donc $P_1|S$. De même $P_2|S$ et $P_3|S$.
Toujours d'après le lemme de Gauss : $P = P_1 P_2 P_3 | S$.
Donc, il existe Q tel que $S = QP$. En M : $S(M) = Q(M) \times P(M) = 0$.
Donc $S_1(M) + S_2(M) + S_3(M) - 1(M) = 0$, i.e.

$$\boxed{S_1(M) + S_2(M) + S_3(M) = I_4}$$

Enfin, en multipliant tout par U : $U = I_4 U = S_1(M) \times U + S_2(M) \times U + S_3(M) \times U$.
Ce serait trop beau, si on trouve ainsi X, Y et Z....
Notons $X = S_1(M) \times U$, $Y = S_2(M) \times U$ et $Z = S_3(M) \times U$.

$$MX = P_1(M)S_1(M) \times U = (P_1S_1)(M) \times U = (U_1(M) \times P(M))U = 0 \times U = 0$$
$$(M + I_4)Y = P_2(M)S_2(M) \times U = (P_2S_2)(M) \times U = (U_2(M) \times P(M))U = 0 \times U = 0$$
$$(M - I_4)^2 Z = P_3(M)S_3(M) \times U = (P_3S_3)(M) \times U = (U_3(M) \times P(M))U = 0 \times U = 0$$

On a donc prouvé l'existence X, Y et Z.
Il reste à montrer l'unicité.
Supposons que (X', Y', Z') vérifie les mêmes conditions.
Notons que

$$S_1(M) = U_1(M)P_2(M)P_3(M) = U_1(M)P_3(M)P_2(M)$$
$$S_1(M)Y' = U_1(M)P_3(M)\underbrace{P_2(M)Y'}_{=0} = 0 \text{ et } S_1(M)Z' = U_1(M)P_2(M)\underbrace{P_3(M)Z'}_{=0} = 0.$$
$$X = S_1(M)U = S_1(M)(X' + Y' + Z') = S_1(M)X' + 0 + 0 = S_1(M)X'$$

Or $S_1(M) + S_2(M) + S_3(M) = I_4$, donc
$X' = S_1(M)X' + S_2(M)X' + S_3(M)X' = S_1(M)X'$,
on démontre également que $S_2(M)X' = 0 = S_3(M)X'$.
On a donc $X = X'$ et de même, on montre que $Y = Y'$ et $Z = Z'$.

Remarques !

Il s'agit du lemme des noyaux, très classique en algèbre...