Devoir à la maison n°7

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice 1

1. Donner le développement à l'ordre 7 au voisinage de l'origine et au voisinage de 1 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2-x^3}$.
2. Développement asymptotique.
   (a) Soient $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$.
   A quelle condition nécessaire et suffisante, a-t-on $x^{\alpha}(\ln x)^{\beta} = o\left(x^{\alpha'}(\ln x)^{\beta'}\right)$ au voisinage de $+\infty$?
   (b) Développer au voisinage de $+\infty$, par rapport aux fonctions $x \mapsto x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}$ la fonction F_1 : $x \mapsto (1+x)^{1/x^2}$ à la précision $\dfrac{1}{x^4}$
   (c) Développer au voisinage de $+\infty$, par rapport aux fonctions $x \mapsto x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}$ la fonction F_2 : $x \mapsto \dfrac{(1+x)(\ln(x+1))^{\alpha}}{x(\ln x)^{\alpha}}$ $(\alpha \neq 0)$à la précision $\dfrac{1}{x^3}$

Exercice 2

Faire une carte mentale des propriétés algébriques, comparant $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{K}[X]$.
(Avec les implications, les équivalences...On commencera pas noter l'existence d'une division euclidienne...)

Exercice 3

On considère le corps $\mathbb{K}$.
Soient $P_1, \dots P_k$, k polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux.
Soient $R_1, \dots R_k$, k autres polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

1. Déterminer
$$\{T \in \mathbb{K}[X] \text{ tq } \forall\, i \in \mathbb{N}_k, T \equiv R_i[P_i]\}$$
(On pourra s'inspirer de l'exercice 255...)
2. Comment exploiter le résultat précédent pour obtenir le théorème sur les polynômes de Lagrange ?
3. On considère une matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^4 - X^3 - X^2 + X$
   (a) Factoriser P
   (b) Montrer que $P(M) = 0$.
   (c) On note pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,
$$\text{Ker } N = \left\{ U = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid NU = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \right\}$$
   Montrer que pour tout matrice $U \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, il existe un unique triplet $(X, Y, Z) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que :
   — $U = X + Y + Z$
   — $MX = 0$
   — $(M + I_n)Y = 0$
   — $(M - I_n)^2 Z = 0$
   (Cela se note : $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker } (M + I_n) \oplus \text{Ker } (M - I_n)^2 \oplus \text{Ker } M$).