MPSI 3 - Fermat | Pour le 07.01.21
2020-2021

Devoir à la maison n°6

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la <u>précision</u> des raisonnements et l'énoncé des <u>formules utilisées</u>**.

Exercice 1

C'est un exercice très classique. Prenez le temps de bien y réfléchir, avant d'aller trouver une/la solution sur internet ou ailleurs...

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue.
Montrer qu'il existe a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a|x| + b$.

Exercice 2

Soit f définie sur un intervalle $[a, b]$, telle que pour tout $x_0 \in [a, b]$, $\lim\limits_{x \to x_0, x \neq x_0} f(x)$ existe.
On note pour tout $x_0 \in [a, b]$, $\ell(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0, x \neq x_0} f(x)$

1. On fixe $\epsilon > 0$.
   (a) Montrer que pour tout $u \in [a, b]$:
   $$\exists\ \delta_u > 0 : \qquad \forall\ x \in]u - \delta_u, u + \delta_u[,\ |f(x) - \ell(u)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$
   (b) En déduire que pour tout $x \in]u - \delta_u, u + \delta_u[$, $|f(x) - \ell(x)| \leqslant \epsilon$.
   (c) On note $D_\epsilon = \{x_0 \in [a, b] \text{ tel que } |\ell(x) - f(x_0)| > \epsilon\}$.
   En appliquant le lemme de Cousin, montrer que D_ϵ est fini.
2. (*) En déduire que l'ensemble
   $$D = \{x_0 \in [a, b] \text{ tel que } \ell(x) \neq f(x)\}$$
   est au plus dénombrable (fini ou dénombrable, i.e. en bijection avec $\mathbb{N}$).

Exercice 3

1. Montrer que l'équation $x \ln x = 1$ admet une unique solution sur $]1, +\infty[$, notée x_0.
2. Étudier les variations de $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{\ln x}$ sur $]1, +\infty[$, et montrer que f admet en x_0 un minimum, dont on notera la valeur y_0 (que l'on ne cherchera pas à exprimer)
3. Montrer que pour tout $x \geqslant y_0$,
   — il existe un unique réel de $]1, x_0]$, noté $g(x)$, tel que $e^{g(x)} = x \ln g(x)$,
   — et il existe un unique réel de $[x_0, +\infty[$, noté $h(x)$, tel que $e^{h(x)} = x \ln h(x)$.
4. En se servant des variations de f, justifier que g est décroissante sur $[y_0, +\infty[$ et que h est croissante sur $[y_0, +\infty[$.
5. Déterminer les limites de g et de h en $+\infty$.