Devoir à la maison n°6
CORRECTION

Exercice 1

Piste de recherche...

Dans une équation du type $ax + b$,
- *b est l'ordonnée à l'origine, la valeur en 0.*
- *a est le coefficient directeur, la pente, la valeur de la dérivée.*

Il s'agit donc de majorer la dérivée : $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \approx \frac{\epsilon}{\delta}$ par a.

f est uniformément continue. Donc

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \text{ tels que } \forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |x_1 - x_2| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \epsilon$$

Avec $\epsilon = 1$.

$$\exists\ \delta > 0 \text{ tels que } \forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |x_1 - x_2| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant 1$$

On se concentre autour de x_0 :

$$\forall\ x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \qquad |f(x) - f(x_0)| \leqslant 1 \Longrightarrow -1 + f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant 1 + f(x_0)$$

<u>L'idée :</u> avancer de δ en δ pour arriver jusqu'à x, à partir de 0.
Donc en prenant $n = \left\lfloor \dfrac{x}{\delta} \right\rfloor$, on a $n\delta \leqslant x \leqslant (n+1)\delta$

On a le telescopage : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f((k+1)\delta) - f(k\delta) = f(n\delta) - f(0)$. Donc, par inégalité triangulaire :

$$|f(x) - f(0)| = \left| f(x) - f(n\delta) + \sum_{k=0}^{n-1} f((k+1)\delta) - f(k\delta) \right| \leqslant |f(x) - f(n\delta)| - \sum_{k=0}^{n-1} |f((k+1)\delta) - f(k\delta)| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

Ainsi, en exploitant : $n \leqslant \frac{x}{\delta}$:

$$-\frac{1}{\delta}x + f(0) \leqslant f(x) \leqslant n + f(0) \leqslant \frac{1}{\delta}x + f(0)$$

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{\delta}|x| + f(0)$$

$\boxed{\text{Si } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ uniformément continue, il existe } a \text{ et } b \text{ tels que pour tout } x \in \mathbb{R},\ |f(x) \leqslant a|x| + b.}$

Exercice 2

Soit f définie sur un intervalle $[a,b]$, telle que pour tout $x_0 \in [a,b]$, $\lim_{x\to x_0, x\neq x_0} f(x)$ existe.

On note pour tout $x \in [a,b]$, $\ell(x) = \lim_{x\to x_0, x\neq x_0} f(x)$.

1. On fixe $\epsilon > 0$.
   $D_\epsilon = \{x_0 \in [a,b] \text{ tel que } |\ell(x_0) - f(x_0)| > \epsilon\}$
   (a) Pour $u \in [a,b]$, et tout voisinage W de $\ell(u)$, il existe V, voisinage de u tel que $f(V\backslash\{u\}) \subset W$.
   Ainsi, pour tout $u > 0$, en prenant $W = [\ell(u) - \frac{\epsilon}{2}, \ell(u) + \frac{\epsilon}{2}]$,

   $$\boxed{\exists\ \delta_u > 0 \text{ tel que } \forall\ x \in \underbrace{]u-\delta_u, u+\delta_u[}_{=V} \backslash\{u\}, |f(x) - \ell(u)| < \frac{\epsilon}{2}}$$

   (Normalement, il faut prendre un intervalle fermé, mais un intervalle ouvert suffit, et c'est plus pratique).

   (b) On a alors pour tout $x \in]u-\delta_u, u+\delta_u[$: $u - \delta_u < x < u + \delta_u$.
   Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $[x-\alpha, x+\alpha] \subset]u-\delta_u, u+\delta_u[$ (Exemple $\alpha = \min(\frac{x-u+\delta_u}{2}, \frac{u+\delta_u-x}{2}) > 0$.)
   Et donc pour $t \in [x-\alpha, x+\alpha]$, par inégalité triangulaire :

   $$|f(t) - f(x) = |f(t) - \ell(u) + \ell(u) - f(x)|| \leqslant |f(t) - \ell(u)| + |\ell(u) - f(x)| \leqslant \epsilon$$

   Et nécessairement (puisque t est au voisinage de x et que $\underline{\ell(x) \text{ existe}}$) : $|\ell(x) - f(x)| \leqslant \epsilon$.

   $$\boxed{\text{Donc pour tout } x \in]u-\delta_u, u+\delta_u[,\ |\ell(x) - f(x)| \leqslant \epsilon.}$$

   (c) On note $\delta : u \mapsto \delta_u$, il s'agit d'une jauge définie sur $[a,b]$.
   D'après le lemme de Cousin, il existe une subdivision pointée de $[a,b]$, δ-fine, de cardinal n.
   On note cette subdivision : $\mathcal{P} = \big(([x_{i-1}, x_i], u_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
   Alors pour tout $\forall\ x \in [a,b] \setminus \{u_1, \dots u_n\}$,
   il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $x \in [x_{i-1}, x_i] \subset [u_i - \frac{\delta(u_i)}{2}, u_i + \frac{\delta(u_i)}{2}] \setminus \{u_i\}$,
   Et d'après ce que l'on a vu à la question précédente : $|\ell(x) - f(x)| \leqslant \epsilon$, donc $x \notin D$.
   Finalement, $D \subset \{u_1, u_2, \dots u_n\}$

   $$\boxed{D_\epsilon = \{x_0 \in [a,b] \text{ tel que } |\ell(x_0) - f(x_0)| > \epsilon\} \text{ est fini.}}$$

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $D_{\frac{1}{n}}$ est fini.
   On note : $D = \{x_0 \in [a,b] \text{ tel que } \lim_{x\to x_0, x\neq x_0} f(x_0) \neq f(x)\}$.
   Soit $u \in D$.
   Alors $\ell(u) \neq f(u)$. Donc $|\ell(u) - f(u)| > 0$.
   On note $N = \left\lfloor \dfrac{1}{|\ell(u) - f(u)|} \right\rfloor$,
   on a donc $N \leqslant \dfrac{1}{|\ell(u) - f(u)|} < N+1$ et donc $\dfrac{1}{N+1} < |\ell(u) - f(u)| \leqslant \dfrac{1}{N}$.
   Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, $u \notin D_{\frac{1}{n}}$ et pour tout $n > N$, $u \in D_{\frac{1}{n}}$.
   On peut associer à tout $u \in D$, un entier N_u tel que $u \in D_{\frac{1}{N_u+1}}$ et $u \notin D_{\frac{1}{N_u}}$.
   Ensuite, l'ensemble $D_{\frac{1}{N_u}}$ est fini, on note C_u son cardinal.
   Enfin, l'ensemble $D_{\frac{1}{N_u}} \subset D_{\frac{1}{N_u+1}}$,
   l'ensemble $D_{\frac{1}{N_u+1}} \setminus D_{\frac{1}{N_u}}$ qui contient u est également fini.
   Il contient r_u éléments rangés par ordre croissant (par exemple), u est le ${k_u}^{\text{e}}(1 \leqslant k_u \leqslant r_u)$.
   Soit

   $$\psi : D \mapsto \mathbb{N}, u \mapsto N_u + k_u$$

   Par construction ψ est injective (si $u \neq u'$, alors nécessairement $\psi(u) \neq \psi(u')$).
   $\overline{\psi} : D \to \psi(D) \subset \mathbb{N}$ est une bijection.
   Si $\psi(D) = \mathbb{N}$, ψ est surjective, et alors D est dénombrable.
   Si $\psi(D)$ est fini, ψ n'est pas surjective, mais D est fini.

   $$\boxed{D = \{x_0 \in [a,b] \text{ tel que } \lim_{x\to x_0, x\neq x_0} f(x_0) \neq f(x)\} \text{ est au plus dénombrable.}}$$

Exercice 3

1. Soit $\varphi : x \mapsto x\ln x$. Elle est définie, continue et dérivable sur $]1,+\infty[$.
   Pour tout $x \geqslant 1$, $\varphi'(x) = 1+\ln x \geqslant 1$ car $\ln([1,+\infty[) \subset \mathbb{R}_+$.
   Donc φ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, à valeurs dans $[\varphi(1), \lim\limits_{+\infty}\varphi[= [0,+\infty[$.
   Ainsi φ établit une bijection de $[1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$.
   Par ailleurs, $1 \in \mathbb{R}_+$, donc
   $$\boxed{\text{l'équation } x\ln x = 1 \text{ admet une unique solution sur }]1,+\infty[, \text{ notée } x_0.}$$
2. La fonction f est également dérivable sur $]1,+\infty[$.
   Pour tout $x > 1$,
   $$f'(x) = \frac{e^x(\ln x - \frac{1}{x})}{(\ln x)^2} = \frac{e^x}{x(\ln x)^2}(\varphi(x)-1)$$
   Or pour tout $x>1$, $e^x > 0$, $x(\ln x)^2 > 0$. Donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)-1$.
   Comme φ est croissante :
   $$\boxed{f'(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \varphi(x) \geqslant 1 \Longleftrightarrow x \geqslant x_0}$$
   $$\boxed{f \text{ admet en } x_0 \text{ un minimum, dont on note la valeur } y_0}$$
3. f est strictement décroissante de $]1,x_0]$ sur $[f(x_0), \lim_1 f[= [y_0,+\infty[$ et continue.
   Donc f établit une bijection de $]1,x_0]$ sur $[y_0,+\infty[$.
   $$\boxed{\forall\, x \geqslant y_0, \exists\,!a_1 \in]1,x_0] \text{ tel que } f(a_1) = x \ \text{ i.e. } \frac{e^{a_1}}{\ln a_1} = x. \qquad g : [y_0,+\infty[\to]1,x_0[, x \mapsto a_1}$$
   f est strictement croissante de $]x_0,+\infty[$ sur $[f(x_0), \lim_{+\infty} f[= [y_0,+\infty[$ et continue.
   Donc f établit une bijection de $[x_0,+\infty[$ sur $[y_0,+\infty[$.
   $$\boxed{\forall\, x \geqslant y_0, \exists\,!a_2 \in [x_0,+\infty[\text{ tel que } f(a_2) = x \ \text{ i.e. } \frac{e^{a_2}}{\ln a_2} = x. \qquad h : [y_0,+\infty[\to [x_0,+\infty[, x \mapsto a_2}$$
4. Soit $x < x'$, deux éléments de $[y_0,+\infty[$.
   — On a $X = g(x) \in]1,x_0]$ et $X' = g(x') \in]1,x_0]$.
   $f(g(x)) = x < x' = f(g(x'))$ et f est décroissante sur $]1,x_0]$, donc
   $$g(x) > g(x')$$
   $$\boxed{g \text{ est décroissante sur } [y_0,+\infty[.}$$
   — On a $X = h(x) \in [x_0,+\infty[$ et $X' = h(x') \in [x_0,+\infty[$.
   $f(h(x)) = x < x' = f(h(x'))$ et f est croissante sur $[x_0,+\infty[$, donc
   $$h(x) < h(x')$$
   $$\boxed{h \text{ est croissante sur } [y_0,+\infty[.}$$
5. — Soit $a = e^e$, alors $\ln\ln(a) = \ln\ln(e^e) = \ln(e) = 1$.
   Pour $x > a$ et $x \geqslant y_0$:
   $$f(\ln x) = \frac{e^{\ln x}}{\ln(\ln x)} = \frac{x}{\ln(\ln x)} < \frac{x}{\ln\ln a} = x = f(h(x))$$
   Puis par croissance de f : $h(x) > \ln x$. (quand $x \to +\infty$, nécessairement, $x > a$ et $x \geqslant y_0$).
   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty \text{ (divergence par minoration)}}$$
   — Pour $x > e^2$, $\sqrt{x} > e$, donc $x > \sqrt{x}e$.
   Et $e^{1/\sqrt{x}} > e^0 = 1$, donc $e^{e^{1/\sqrt{x}}} > e^1 = e$
   $$f(e^{1/\sqrt{x}}) = \frac{e^{e^{1/\sqrt{x}}}}{\ln(e^{1/\sqrt{x}})} = \sqrt{x}e^{e^{1/\sqrt{x}}} < \sqrt{x}e < x = f(g(x))$$
   Puis par décroissance de f sur $]1,x_0]$: $e^{1/\sqrt{x}} > g(x)$ et on sait que $g(x) > 1$.
   (comme $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ en $+\infty$, nécessairement, au voisinage de $+\infty$: $e^{1/\sqrt{x}} < x_0$).
   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1 \text{ (convergence par encadrement)}}$$