

Devoir à la maison n°4

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.

Exercice 1

On considère les suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant la relation :

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0 \quad \text{suite récurrente linéaire d'ordre 3}$$

1. Écrire un programme informatique en **Python** qui demande :
 - la valeur de u_0
 - la valeur de u_1
 - la valeur de u_2
 - la valeur de net qui calcule le n^{e} terme de la suite vérifiant (1) ayant pour trois premières valeurs celles données précédemment.
2. Résoudre alors $9x^3 - 9x^2 - 7x + 7 = 0$.
3. Déterminer les suites géométriques non nulles vérifiant (1).
4. On considère une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant (1).
 - (a) Exprimer en fonction de u_0, u_1, u_2 trois nombres réels α, β, γ tels que :

$$\begin{cases} u_0 &= \alpha + \beta + \gamma \\ u_1 &= \alpha + \frac{\sqrt{7}}{3} \beta - \frac{\sqrt{7}}{3} \gamma \\ u_2 &= \alpha + \frac{7}{9} \beta + \frac{7}{9} \gamma \end{cases}$$

(On donnera les expressions exactes de α, β, γ).

On associe à la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \alpha - \beta \left(\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n - \gamma \left(-\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n.$$

- (b) Établir qu'elle vérifie (1)
- (c) Montrer que $v_0 = v_1 = v_2 = 0$, puis que, pour tout entier $n \geq 0$, $v_n = 0$.
- (d) Exprimer enfin u_n en fonction de n .

Exercice 2

On cherche à démontrer le théorème de Wilson.

1. Montrer que si p est un nombre entier qui divise $(p-1)! + 1$, alors p est premier.
2. Réciproquement,
 - (a) Montrer que si $p = 2$ ou $p = 3$, alors p divise $(p-1)! + 1$.
 - (b) On suppose que p est un nombre premier supérieur à 5.
Montrer que pour tout $a \in \llbracket 2, p-1 \rrbracket$, il existe un unique entier $b \in \llbracket 2, p-1 \rrbracket$ tel que $a \times b \equiv 1[p]$.
Puis montrer que $a \neq b$
 - (c) En déduire que si $p \geq 4$ et p premier, alors p divise $(p-1)! + 1$.
 - (d) Conclure en donnant le théorème de Wilson que vous venez de prouver.

Problème

On considère la fonction f définie par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & f(x) = x^2 - x \ln(x) - 1 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

ainsi que la fonction φ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x)$$

On donne le tableau de valeurs de f :

$x =$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x) \simeq$	-0,4	0	0,6	1,6	3	4,7	6,9	9,5

A. Étude de f .

Dans cette partie, nous étudions la fonction f , en particulier son caractère bijectif.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Sur quel intervalle I est dérivable f ? Calculer alors pour tout x de I , $f'(x)$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$. En donner une interprétation graphique.
4. Dresser le tableau de variations de f en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini (on pourra mettre x^2 en facteur).
5. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.
6. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
7. Faire une représentation graphique des fonctions f et f^{-1} , sur votre copie.

B. Première suite associée à f .

Nous étudions dans cette partie une suite associée (implicitement) à f .

1. Justifier que pour tout entier naturel k , il existe un unique réel x_k positif tel que $f(x_k) = k$.
2. Donner la valeur de x_0 .
3. Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2 .
4. Repérer x_0 , x_1 et x_2 sur l'axe des abscisses de la représentation graphique.
5. Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante.
6. En utilisant la réponse à la question A.6. (sur la limite de f^{-1} en $+\infty$), déduire la limite de (x_k) lorsque k tend vers l'infini.

C. Seconde suite associée à f .

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$

1. Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes.
En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $x = \varphi(x)$.
2. Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. On donne $\varphi(\frac{3}{2}) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$.
Montrer que $\varphi\left(\left[\frac{3}{2}; 2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.
4. Montrer que pour tout entier n , $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$
5. Notons $\psi : x \mapsto \varphi(x) - x_1 + \frac{2}{9}(x - x_1)$.
Étudier les variations de ψ (on remarquera que le discriminant rencontré est un carré...)
En déduire que ψ est croissante sur $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$.
6. Que vaut $\psi(x_1)$?
En étudiant en deux temps, sur les intervalles $[\frac{3}{2}, x_1]$ et $[x_1, 2]$, montrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], \quad |\varphi(x) - x_1| \leq \frac{2}{9}|x - x_1|$$

7. En déduire que pour tout entier n : $|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|$ puis que $|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$.
8. En déduire la limite de la suite (u_n) .