MPSI 3 - Fermat Le 1.12.20
2020-2021

Devoir à la maison n°4
CORRECTION

Exercice 1

On considère les suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant la relation :

$$(\mathbf{1})\qquad \forall\, n\in\mathbb{N},\quad 9u_{n+3}-9u_{n+2}-7u_{n+1}+7u_n=0 \qquad \textit{suite récurrente linéaire d'}\underline{\textit{ordre 3}}$$

1.
```python
def DM4(a,b,c,n):
    u,v,w=a,b,c
    for k in range(2,n):
        u,v,w=v,w,w+7/9*v-7/9*u
    return(w)
```

2. 1 est racine évidente :

$$9x^3-9x^2-7x+7=(x-1)(9x^2-7)=(x-1)(3x-\sqrt{7})(3x+\sqrt{7})$$

$$\boxed{9x^3-9x^2-7x+7=0 \iff x\in\left\{1,-\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{\sqrt{7}}{3}\right\}}$$

3. Soit (u_n) une suite géométrique de raison r vérifiant $(\mathbf{1})$.
Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=r^nu_0$ et donc

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \left(9r^{n+3}-9r^{n+2}-7r^{n+1}+7r^n\right)\times u_0=\left(9r^3-9r^2-7r^1+7\right)\times r^nu_0$$

Si, en outre, (u_n) est non nul ; alors $r\neq 0$ et $u_0\neq 0$, donc $9r^3-9r^2-7r^1+7=0$.

$$\boxed{\text{Les suites géométriques non nulles vérifiant } (\mathbf{1}) \text{ sont les suites de raison } r\in\left\{1,-\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{\sqrt{7}}{3}\right\}}$$

4. On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $(\mathbf{1})$.
   (a) On résout le système :

$$(\mathcal{S})\iff\left\{\begin{array}{rcrrr|l} u_0 &=& \alpha & +\beta & +\gamma & \\ u_1-u_0 &=& & \dfrac{\sqrt{7}-3}{3}\beta & -\dfrac{\sqrt{7}+3}{3}\gamma & L_2-L_1\\ u_2-u_0 &=& & \dfrac{-2}{9}\beta & +\dfrac{-2}{9}\gamma & L_3-L_1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrrr} u_0 &=& \alpha & +\beta & +\gamma\\ 3(u_1-u_0) &=& & (\sqrt{7}-3)\beta & -(\sqrt{7}+3)\gamma\\ \dfrac{9}{2}(u_0-u_2) &=& & \beta & +\gamma\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrrr|l} u_0 &=& \alpha & +\beta & +\gamma & \\ \frac{1}{2}(6u_1-27u_2+21u_0) &=& & \sqrt{7}\beta & -\sqrt{7}\gamma & L_2+3L_3\\ \dfrac{9}{2}(u_0-u_2) &=& & \beta & +\gamma & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrrr} u_0 &=& \alpha & +\beta & +\gamma\\ \frac{3\sqrt{7}}{14}(2u_1-9u_2+7u_0) &=& & \beta & -\gamma\\ \dfrac{9}{2}(u_0-u_2) &=& & \beta & +\gamma\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rrrcc|l} \alpha & +\beta & +\gamma &=& u_0 & \\ & \beta & &=& \frac{1}{28}(6\sqrt{7}u_1-(27\sqrt{7}+63)u_2+(21\sqrt{7}+63)u_0) & \frac{1}{2}(L_2+L_3)\\ & & \gamma &=& \frac{1}{28}(-6\sqrt{7}u_1+(27\sqrt{7}-63)u_2-(21\sqrt{7}-63)u_0) & \frac{1}{2}(L_3-L_2)\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcc|l} \alpha &=& \frac{1}{2}(9u_2-7u_0) & L_1-L_2-L_3\\ \beta &=& \frac{3}{28}(2\sqrt{7}u_1-(9\sqrt{7}+21)u_2+(7\sqrt{7}+21)u_0) & \\ \gamma &=& \frac{3}{28}(-2\sqrt{7}u_1+(9\sqrt{7}-21)u_2-(7\sqrt{7}-21)u_0) & \end{array}\right.$$

On trouve donc (par équivalence) :

$$\boxed{\begin{array}{c}\alpha=\frac{1}{2}(9u_2-7u_0)\qquad \beta=\frac{3}{28}(2\sqrt{7}u_1-(9\sqrt{7}+21)u_2+(7\sqrt{7}+21)u_0)\\ \gamma=\frac{3}{28}(-2\sqrt{7}u_1+(9\sqrt{7}-21)u_2-(7\sqrt{7}-21)u_0)\end{array}}$$

On associe à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}\qquad v_n=u_n-\alpha-\beta\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n-\gamma\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
9v_{n+3} - 9v_{n+2} - 7v_{n+1} + 7v_n &= 9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n - \alpha \underbrace{(9-9-7+7)}_{=0} \\
&\quad -\beta \left(\frac{7}{3}\right)^n \underbrace{\left(9\left(\frac{7}{3}\right)^3 - 9\left(\frac{7}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{7}{3}\right)^1 + 7\left(\frac{7}{3}\right)^0\right)}_{=0} \\
&\quad -\gamma \left(-\frac{7}{3}\right)^n \underbrace{\left(9\left(-\frac{7}{3}\right)^3 - 9\left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 7\left(-\frac{7}{3}\right)^1 + 7\left(-\frac{7}{3}\right)^0\right)}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } (v_n) \text{ ainsi définie, vérifie } (\mathbf{1})}$$

(c) On a, d'après le système vérifié par (α, β, γ) (en notant $r = \frac{\sqrt{7}}{3}$) :

$$v_0 = u_0 - \alpha - \beta - \gamma = 0 \qquad v_1 = u_1 - \alpha - r\beta + r\gamma = 0 \qquad v_2 = u_2 - \alpha - r^2\beta - r^2\gamma = 0$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $v_n = 0$ ».
— On vient de voir que $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies.
— Soit $n \in \mathbb{N}$, tel $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_{n+1}$ et $\mathcal{P}_{n+2}$ sont vraies.
Alors comme (v_n) vérifie $(\mathbf{1})$:

$$v_{n+3} = \frac{1}{9}(9v_{n+2} + 7v_{n+1} - 7v_n) = \frac{1}{9}(0+0-0) = 0$$

en exploitant $\mathcal{P}_{n+2}$, $\mathcal{P}_{n+1}$ et $\mathcal{P}_n$, respectivement.
Donc $\mathcal{P}_{n+3}$ est vraie.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 0,\ v_n = 0.}$$

(d) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_n = \alpha + \beta\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n + \gamma\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n = \alpha + \beta\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n + \gamma\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n}$$

Exercice 2

On cherche à démontrer le théorème de Wilson.

1. Soit p un nombre entier qui divise $(p-1)! + 1$.
Soit k un diviseur de p, différent de p,
alors comme p divise $(p-1)!+1$, k divise également ce nombre.
Comme $k \neq p$, nécessairement, $k < p$ et donc $k|(p-1)!$.
Donc k divise $(p-1)!+1$ et $(p-1)!$, il divise la différence de ces nombres : $k|1$. Donc $k = 1$
Les seuls diviseurs positifs de p sont 1 et p.

$$\boxed{p \text{ est premier.}}$$

2. Réciproquement,

(a) Si $p = 2$, $(p-1)! + 1 = 1 + 1 = 2$, donc $p|(p-1)! + 1$.
Si $p = 3$, $(p-1)! + 1 = 2 + 1 = 3$, donc $p|(p-1)! + 1$.

$$\boxed{\text{si } p = 2 \text{ ou } p = 3, \text{ alors } p \text{ divise } (p-1)! + 1.}$$

(b) On suppose que p est un nombre premier supérieur à 5.
Soit $a \in [\![2, p-2]\!]$.
a et p sont premiers entre eux.
D'après le théorème de Bézout, Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + pv = 1$.
Puis, par division euclidienne de u par p : $u = pq + b$ avec $b \in [\![0, p-1]\!]$.
Et donc $1 = a(pq+b) + pv = ab + p(qa+v)$. Ainsi $ab \equiv 1[p]$.
Pour le moment, $b \in [\![0, p-1]\!]$, montrons que $b \notin \{0, 1, p-1\}$.
- si $b = 0$, $a \times b = 0 \neq 1[p]$ (ou $p|u$, donc $p|1 = au + pv$), donc cela n'est pas possible.
- si $b = 1$, alors $ba \equiv a \equiv 1[p]$, ce n'est pas possible car $p \geqslant 5$ et $a \in [\![2, p-2]\!]$
- si $b = p-1$, alors $ba \equiv (p-1)a \equiv pa - a \equiv -a \equiv 1[p]$. Impossible.
car aucun nombre n'est congru à -1, modulo p dans $[\![2, p-2]\!]$.

Donc $b \in [\![2, p-2]\!]$ également.

Enfin, montrons qu'il est unique (pour un a donné).

Si $ab \equiv ab' \equiv 1[p]$, alors $p|(b-b')a$.

Mais $a \wedge p = 1$, car p est premier et $a \leqslant p-2$, donc $p|b-b'$.

Or $b, b' \in [\![2, p-2]\!]$, donc $b - b' \in [\![-p-4, p-4]\!]$.

Nécessairement $b - b' = 0$ (seul nombre divisible par p de cette ensemble).

Enfin, si $b = a$, alors $a^2 \equiv 1[p]$, donc $p|a^2 - 1 = (a-1) \times (a+1)$.

Nécessairement (p premier) : $p|a-1$ ou $p|a+1$.

Or $a \in [\![2, p-2]\!]$, donc $a - 1 \in [\![1, p-3]\!]$ et $a + 1 \in [\![3, p-1]\!]$. Impossible.

Donc $b \neq a$.

$$\boxed{\text{Pour tout } a \in [\![2, p-2]\!], \text{ il existe un unique entier } b \in [\![2, p-2]\!] \subset \{a\} \text{ tel que } a \times b \equiv 1[p].}$$

(c) On a donc, d'après la question précédente,

on peut séparer l'ensemble $[\![2, p-2]\!]$ en deux ensembles disjoints A et B : $[\![2, p-2]\!] = A \uplus B$,

tel qu'il existe une application bijective $\varphi : A \times B$ tel que pour tout $a \in A$, $a \times \varphi(a) = 1$.

On a alors

$$[(p-1)!] = 1 \times \prod_{a \in A}^{p-1} a \times \prod_{b \in B}^{p-1} b \times (p-1) = 1 \left[\prod_{a \in A}^{p-1} a\varphi(a)\right] \times (p-1) \equiv (p-1) \prod_{a \in A}^{p-1} 1 \equiv -1[p]$$

$$\boxed{\text{Ainsi si } p \geqslant 4 \text{ et } p \text{ premier, alors } p \text{ divise } (p-1)! + 1.}$$

(d) On a démontré par double implication

$$\boxed{(p-1)! \equiv -1[p] \iff p|(p-1)! + 1 \iff p \text{ est premier} \qquad (\text{Théorème de Wilson})}$$

Problème

On rappelle les définition des fonctions f et φ

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \\ & f(0) = -1 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x)$$

A. Étude de f.

1. f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ comme la somme de produit de fonctions continues.
   Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Par ailleurs, nous savons (limite de référence) que $\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$, donc par addition :

   $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1 = f(0)$$

   Ainsi f est également continue en 0.

   $$\boxed{\text{Par conséquent : } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

2. f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ comme la somme de produit de fonctions dérivables. Donc

   $$\boxed{f \text{ est dérivable sur } I = \mathbb{R}_+^* \text{ et pour tout } x \in I,\ f'(x) = 2x - \frac{x}{x} - \ln(x) = 2x - 1 - \ln x.}$$

3. Par addition des limites

   $$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -(-\infty) = +\infty.}$$

   Cela signifie que graphiquement, la pente de la tangente à la courbe en $(0, -1)$ est infini : la courbe « démarre »verticalement.

4. Il faut étudier le signe de f', et donc résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
   Or la solution de cette équation s'exprime a priori sous forme ouverte, nous allons donc dériver à nouveau cette fonction.
   Pour tout $x > 0$, $f''(x) = 2 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-1}{x}$ donc $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

On a donc le tableau suivant (complet) :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	
			$+$		
f	-1	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$f'(\frac{1}{2}) = -\ln(\frac{1}{2}) = \ln 2 > 0$

$f(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$
or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

5. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,

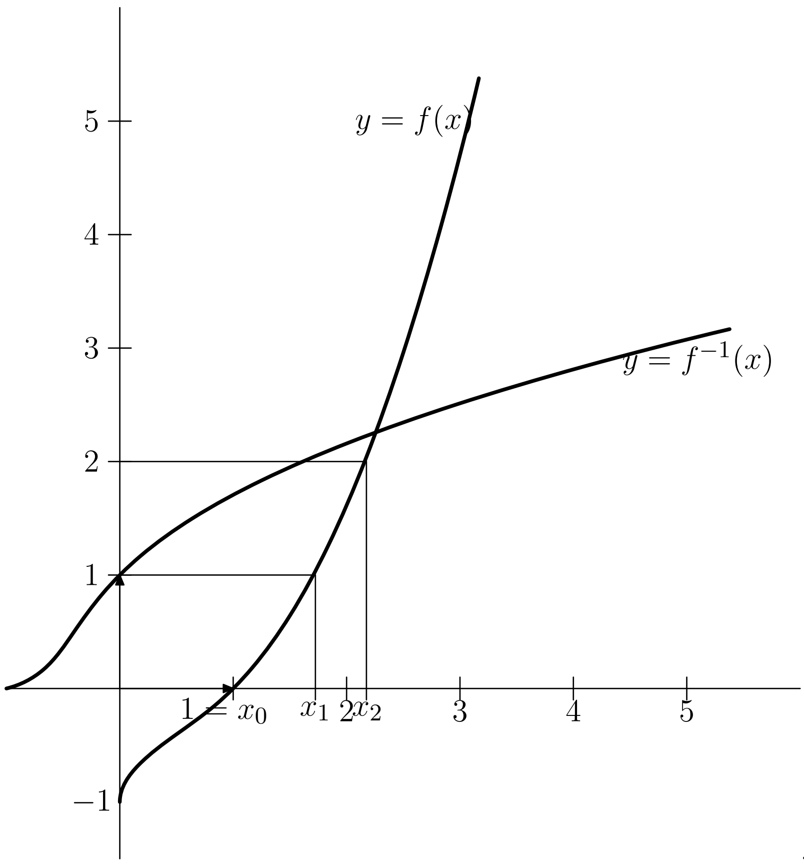
$$\boxed{\text{Donc } f \text{ établit une bijection de } R_+ \text{ sur } [f(0); \lim_{+\infty} f[= [-1; +\infty[= J.}$$

6. f est strictement croissante, donc

$$\boxed{f^{-1} \text{ (même comportement) est strictement croissante de } J \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

On en conclue que

$$\boxed{\text{la limite de } f^{-1}(x) \text{ lorsque } x \text{ tend vers l'infini vaut } +\infty.}$$

7. 

B. Première suite associée à f.

Nous étudions dans cette partie une suite associée (implicitement) à f.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, alors $k \in J$, puisque $\mathbb{N} \subset J = [-1; +\infty[$,
   et comme f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur J,

$$\boxed{\text{il existe un unique réel } x_k \text{ positif tel que } f(x_k) = k, \text{ et cela pour tout } k \in \mathbb{N}.}$$

2. Le tableau donne $f(1) = 0$, donc $\underline{x_0 = 1}$.
3. D'après le tableau de valeurs de f, on a :
   — $f(1,5) = 0,6 < 1 < 1,6 = f(2)$, donc par croissance de f :

$$\boxed{1,5 < x_1 < 2}$$

— $f(2) = 1,6 < 2 < 3 = f(2,5)$, donc par croissance de f :

$$\boxed{2 < x_2 < 2,5}$$

4. Voir le graphe précédent.
5. Soit $k \in \mathbb{N}$. $f(x_k) = k \iff x_k = f^{-1}(k)$.
Puis, nous avons vu que f^{-1} est strictement croissante, donc comme $k < k+1$,
on a $f^{-1}(k) < f^{-1}(k+1)$, c'est exactement à dire : $x_k < x_{k+1}$.
Ceci est vrai pour tout k, donc

$$\boxed{\text{la suite } (x_k) \text{ est croissante.}}$$

6. $x_k = f^{-1}(k)$.
Or $\lim\limits_{k\to+\infty} k = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$, donc par composition des limites :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} f^{-1}(k) = \lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty.}$$

C. Seconde suite associée à f.

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$

1. Pour tout $x > 0$,
$x = \varphi(x) \iff x = \dfrac{2}{x} + \ln x \iff x^2 = 2 + x\ln x \iff x^2 - x\ln x - 1 = 1 \iff f(x) = 1.$
Or l'équation $f(x) = 1$ n'a qu'une seule solution sur $\mathbb{R}_+$: x_1, solution non nulle, donc il en est de même de l'équation $x = \varphi(x)$.

$$\boxed{\text{le réel } x_1 \text{ est l'unique solution de l'équation } x = \varphi(x).}$$

2. φ est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) = \dfrac{-2}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-2}{x^2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } \varphi \text{ est strictement décroissante sur }]0;2] \text{ et est strictement croissante sur } [2;+\infty[.}$$

3. Soit $x \in \left[\frac{3}{2};2\right]$, alors comme φ est décroissant sur cette intervalle, on a $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) \geqslant \varphi(x) \geqslant \varphi(2)$.
Et comme $\varphi(\frac{3}{2}) \simeq 1,73$, alors $2 \geqslant \varphi(\frac{3}{2})$
et $\varphi(2) \simeq 1,69$ alors $\varphi(2) \geqslant \frac{3}{2}$.
Par conséquent, pour tout $x \in \left[\frac{3}{2};2\right]$, on a $2 \geqslant \varphi(x) \geqslant \dfrac{3}{2}$, donc

$$\boxed{\varphi\left(\left[\frac{3}{2};2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2};2\right].}$$

4. Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$:" $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$".
— $u_0 = \dfrac{3}{2}$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Alors $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$, donc $u_n \in \left[\dfrac{3}{2};2\right]$,
donc d'après la question précédente, $\varphi(u_n) \in \left[\dfrac{3}{2};2\right]$ ou $u_{n+1} \in \left[\dfrac{3}{2};2\right]$.
Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
On a donc démontrer (par récurrence) que

$$\boxed{\text{pour tout entier } n,\ \frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2.}$$

5. Notons $\psi : x \mapsto \varphi(x) - x_1 + \frac{2}{9}(x - x_1)$.
Là encore la fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (sur $\mathbb{R}$ même) et pour tout $x > 0$,
$$\psi'(x) = \varphi'(x) + \frac{2}{9} = \frac{x-2}{x^2} + \frac{2}{9} = \frac{9x - 18 + 2x^2}{9x^2}$$
Étudions le signe de $2x^2 + 9x - 18$, pour cela cherchons les racines de ce polynôme.

Le discriminant est $\Delta = 9^2 - 4 \times 2 \times (-18) = 81 + 144 = 225 = 15^2$ et les racines sont $x' = \dfrac{-9+15}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ et $x'' = \dfrac{-9-15}{4} = \dfrac{-24}{4} = -6$.
On a ainsi, $\psi'(x) \geqslant 0$ ssi $x \in (\mathcal{D}_\psi) \cap \left(]-\infty; -6] \cup [\frac{3}{2}; +\infty[\right)$.
Par conséquent ψ est strictement décroissante sur $]0; \frac{3}{2}]$ et est strictement croissante sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$.
En particulier

$$\boxed{\text{sur } \left[\tfrac{3}{2}; 2\right],\ \psi \text{ est croissante.}}$$

6. Par ailleurs $\psi(x_1) = \varphi(x_1) - x_1 + \frac{2}{9}(x_1 - x_1) = 0$ car $\psi(x_1) = x_1$ d'après la question C.1.
Par croissance de ψ sur $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$, alors :
— si $x \in \left[\frac{3}{2}; x_1\right]$, $\psi(x) \leqslant 0$ et donc $\varphi(x) - x_1 \leqslant -\dfrac{2}{9}(x - x_1)$, i.e. $\varphi(x) - x_1 \leqslant \dfrac{2}{9}(x_1 - x)$.
Or φ est décroissante donc $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_1) = x_1$, donc $\varphi(x) - x_1 \leqslant 0$.
On a donc $|\varphi(x) - x_1| = \varphi(x) - x_1$ et $|x - x_1| = x_1 - x$.
Par conséquent : $\varphi(x) - x_1 \leqslant \dfrac{2}{9}(x_1 - x)$ devient $|\varphi(x) - x_1| \leqslant \dfrac{2}{9}|x - x_1|$
— si $x \in [x_1; 2]$, $\psi(x) \geqslant 0$ et donc $\varphi(x) - x_1 \geqslant -\dfrac{2}{9}(x - x_1)$, i.e. $x_1 - \varphi(x) \leqslant \dfrac{2}{9}(x - x_1)$.
Or φ est décroissante donc $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_1) = x_1$, donc $\varphi(x) - x_1 \geqslant 0$.
On a donc $|\varphi(x) - x_1| = x_1 - \varphi(x)$ et $|x - x_1| = x - x_1$.
Par conséquent : $x_1 - \varphi(x) \leqslant \dfrac{2}{9}(x - x_1)$ devient $|\varphi(x) - x_1| \leqslant \dfrac{2}{9}|x - x_1|$
Et par conséquent :

$$\boxed{\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right],\ |\varphi(x) - x_1| \leqslant \frac{2}{9}|x - x_1|}$$

7. On applique le résultat précédent en $x = u_n$ et donc $\varphi(x) = \varphi(u_n) = u_{n+1}$,
on a donc pour tout entier n : $|u_{n+1} - x_1| \leqslant \dfrac{2}{9}\,|u_n - x_1|$.
Montrons ce dernier résultat par récurrence.
Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n$:“ $|u_n - x_1| \leqslant \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$ ”.
— $u_0 = \frac{3}{2}$, $x_1 \in [\frac{3}{2}; 2]$, donc $|u_0 - x_1| = x_1 - \frac{3}{2} \leqslant 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.
Et $\left(\frac{2}{9}\right)^0 = 1$, donc $|u_0 - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^0$ i.e. $\mathcal{Q}_0$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}_n$ est vraie.
Alors $|u_n - x_1| \leqslant \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$,
or $|u_{n+1} - x_1| \leqslant \dfrac{2}{9}\,|u_n - x_1|$ donc $|u_{n+1} - x_1| \leqslant \dfrac{2}{9} \times \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$,
donc $|u_{n+1} - x_1| \leqslant \left(\dfrac{2}{9}\right)^{n+1}$.
Ainsi $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.
On a donc démontrer (par récurrence) que

$$\boxed{\text{pour tout entier } n,\ |u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n.}$$

8. Puisque la suite $\left(\dfrac{2}{9}\right)^n$ est géométrique de raison $r = \frac{2}{9} \in]-1; 1[$, elle converge vers 0.
D'après le théorème de convergence par encadrement :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge et sa limite vaut } 0.}$$