

Devoir surveillé n°6 CORRECTION

Exercice

On considère un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $z \in \mathcal{Z}_P$, $-z \notin \mathcal{Z}_P$.

1. Supposons que $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$.

On a alors

$$P = \underbrace{\sum_{k \leq d, k \equiv 0[2]} a_k X^k}_{h = \frac{k}{2}} + \underbrace{\sum_{k \leq d, k \equiv 1[2]} a_k X^k}_{h = \frac{k-1}{2}} = \sum_{h \leq d/2} a_{2h} X^{2h} + \sum_{h \leq (d-1)/2} a_{2h+1} X^{2h+1}$$

Notons $R = \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} a_{2h} X^h$ et $S = \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} a_{2h+1} X^h$.

On a $R(X^2) + XS(X^2) = \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} a_{2h} X^{2h} + X \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} a_{2h+1} X^{2h} = P(X)$.

Reste à montrer que R et S sont premiers entre eux.

Soit $X - \alpha$ un irréductible de $\mathbb{C}[X]$ qui divise R et S . Alors $R(\alpha) = 0 = S(\alpha)$ Si $\alpha \neq 0$, α admet deux racines carrées : $z = \sqrt{|\alpha|} \exp\left(\frac{i}{2} \arg(\alpha)\right)$ et $-z$.

On a alors $P(z) = R(z^2) + zS(z^2) = R(\alpha) + zS(\alpha) = 0$ et $P(-z) = R((-z)^2) - zS((-z)^2) = R(\alpha) - zS(\alpha) = 0$.

Ceci est impossible d'après les hypothèses sur P . Donc $\alpha = 0$.

On a alors $\alpha = 0$. Et donc $P(0) = P(\alpha) = R(\alpha^2) + \alpha S(\alpha^2) = R(0) + 0S(0) = 0$.

Ainsi 0 st racine de P . Impossible, car $-0 = 0$ est aussi racine de P .

Finalement, R et S n'ont aucun diviseur commun ; ils sont premiers entre eux.

Il existe $R, S \in \mathbb{C}[X]$, premiers entre eux tels que $P = R(X^2) + XS(X^2)$.

2. Comme $R \wedge S = 1$, d'après le théorème de (Bachet-)Bézout : $\exists U, V$ tels que $UR + VS = 1$.
En prenant $A = -U$ et $V = -S$

Il existe $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que $AR + BS = -1$

3. On considère alors $Q = B(X^2) + XA(X^2)$.

$$\begin{aligned} P \times Q &= [R(X^2) + XS(X^2)] \times [B(X^2) + XA(X^2)] \\ &= X[A(X^2)R(X^2) + B(X^2)S(X^2)] + [R(X^2)B(X^2) + X^2A(X^2)S(X^2)] \end{aligned}$$

Puis, comme $AR + BS = -1$, en composant avec X^2 : $A(X^2)R(X^2) + B(X^2)S(X^2) = -1$ également.

Donc, en notant $H = RB + XAS$, $P \times Q = -X + H(X^2)$.

Il existe $H \in \mathbb{C}[X]$ tel que P divise $H(X^2) - X$.

4. Pour $P = X^3 + X - 1$, on trouve en suivant les calculs précédents :

— $R = -1$ et $S = X + 1$ (en effet : $P = -1 + X(1 + X^2)$)

— $A = -X$ et $B = -1$ (en effet : $AR + BS = (-X)(-1) + (X+1)(-1) = X - X - 1 = -1$)

— $H_0 = RB + XAS = (-1)(-1) + X(-X)(X+1) = 1 - X^2 - X^3$

On trouve alors normalement $P|H_0(X^2) - X$.

On peut vérifier : $H_0(X^2) - X = 1 - X - X^4 - X^6 = (X^3 + X - 1) \underbrace{(-X^3 - 1)}_{Q_0}$.

Soit H tel que $P|H(X^2) - X$, alors il existe Q tel que $H(X^2) - X = PQ$.

Et donc $H(X^2) - H_0(X^2) = (H(X^2) - X) - (-H_0(X^2) - X) = P \times (Q - Q_0)$.

P admet trois racines distinctes : une réelle (P est strictement croissant car $P' = X^2 + 1$) et deux racines conjuguées (et non opposés dans $\mathbb{C}$), noté a , b et $\bar{b}$.
On a alors $H(a^2) = H_0(a^2) + P(a) \times (Q(a) - Q_0(a)) = H_0(a^2)$,
et de même $H(b^2) = H_0(b^2)$ et $H(\bar{b}^2) = H_0(\bar{b}^2)$.
Donc $H - H_0$ admet a^2 , b^2 et $\bar{b}^2$ comme racines : $(X - a^2)(X - b^2)(X - \bar{b}^2) | H - H_0$.
En développant : $X^3 - (a^2 + b^2 + \bar{b}^2)X + (a^2b^2 + a^2\bar{b}^2 + b^2\bar{b}^2)X - (abb)^2 | H - H_0$.
Or $abb = 1$ donc $(abb)^2 = 1$, $a + b + \bar{b} = 0$, $ab + a\bar{b} + b\bar{b} = 1$
donc $a^2 + b^2 + \bar{b}^2 = (a + b + \bar{b})^2 - 2(ab + a\bar{b} + b\bar{b}) = -2$,
et enfin $a^2b^2 + a^2\bar{b}^2 + b^2\bar{b}^2 = (ab + a\bar{b} + b\bar{b})^2 - 2(a^2b\bar{b} + ab^2\bar{b} + abb^2) = 1^2 - (a + b + \bar{b})(abb) =$
1.
On obtient donc : $X^3 - (-2)X^2 + 1X - 1 = X^3 + 2X^2 + X - 1$ divise $H - H_0$.
Réciproquement, si il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $H = H_0 + (X^3 + 2X^2 + X - 1)Q$,
Alors

$$\begin{aligned} H(X^2) - X &= H_0(X^2) - X + (X^6 + 2X^4 + X^2 - 1)Q(X^2) \\ &= P \times Q_0 + (X^3 + X - 1) \times (X^3 + X + 1)Q(X^2) \\ &= P \times Q_0 + P \times (X^3 + X + 1)Q(X^2) \end{aligned}$$

Donc $P | H(X^2) - X$.

$$\boxed{\{H \in \mathbb{C}[X] \mid P | H(X^2) - X\} = \{1 - X - X^3 + Q \times (X^3 + 2X^2 + X - 1); Q \in \mathbb{C}[X]\}}$$

Problème - Approximants de Padé par les fractions continues

Le but de ce problème est d'étudier les approximants de PADÉ, dont on trouve la définition suivante sur wikipedia :

Un approximant de PADÉ d'indice (p, q) de la fonction f désigne une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ telle que les degrés des polynômes P et Q soient inférieurs ou égaux respectivement à p et q et que $\frac{P}{Q}$ approxime f en 0 au moins à l'ordre $p + q$.

I. Forme normalisée et unicité de l'approximant de Padé.

1. Forme normalisée.

(a) Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, avec 0 qui n'est pas un pôle de F .

Donc il existe $C, D \in \mathbb{K}(X)$ tel que $D(0) \neq 0$ et $F = \frac{C}{D}$.

Soit $\Delta = C \wedge D$, et $\lambda = \frac{\Delta(0)}{D(0)}$ ($D(0) \neq 0$).

Comme $\Delta | D$ et $\Delta | C$, il existe $B = \lambda \frac{D}{\Delta}$ et $A = \lambda \frac{C}{\Delta}$.

On a alors $A \times D = \lambda \frac{D \times C}{\Delta} = B \times C$, donc $F = \frac{A}{B}$,

et $B(0) = \lambda \frac{D(0)}{\Delta(0)} = 1$ (comme X ne divise pas D , il ne divise pas Δ et donc $\Delta(0) \neq 0$).

Ceci assure l'existence du couple recherché.

Concernant l'unicité. Supposons que $F = \frac{A}{B} = \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}$ avec les mêmes conditions.

Donc $A \times \tilde{B} = \tilde{A} \times B$, donc $B | A\tilde{B}$ et comme $A \wedge B = 1$, $B | \tilde{B}$.

Par symétrie, on a également $\tilde{B} | B$, et donc B et $\tilde{B}$ sont associées.

Il existe donc $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $B = \mu \tilde{B}$ et comme $1 = [B]_0 = B(0) = \mu \tilde{B}(0) = \mu [\tilde{B}]_0 = \mu$.

on a $\mu = 1$ et donc $B = \tilde{B}$ et $A = \tilde{A}$ (car $A \times B = A \times \tilde{B} = \tilde{A} \times B$).

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall F \in \mathbb{K}(X), \text{ avec } 0 \text{ qui n'est pas un pôle de } F, \\ &\exists !(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}) \text{ tel que } F = \frac{A}{B}, A \wedge B = 1 \text{ et } [B]_0 = 1 \end{aligned}}$$

On dit que $\frac{A}{B}$ est le représentant normalisé de F .

(b) Le dénominateur $D = X^3 + 2X^2 + X + 2$ ne s'annule pas en 0 ($D(0) = 2$).

$$\boxed{\text{Donc } 0 \text{ n'est pas pôle de } F}$$

Et comme $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2$ et $X^3 + 2X^2 + X + 2 = (X^2 + 1)(X + 2)$,
 $X^4 + 2X^2 + 1 \wedge X^3 + 2X^2 + 2 = X^2 + 1$.

$$\text{La forme normalisée de } F = \frac{X^2 + 1}{X + 2} \text{ est } \frac{\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}X + 1}.$$

2. Approximant de cos à l'ordre 6.

(a) Il s'agit d'un calcul, classique maintenant...

$$\begin{aligned} \frac{a + bx + cx^2}{1 + dx + ex^2} & \underset{x \rightarrow 0}{=} (a + bx + cx^2)(1 - (dx + ex^2) + (dx + ex^2)^2 - (dx + ex^2)^3 + (dx + ex^2)^4 \\ & \quad - (dx + ex^2)^5 + (dx + ex^2)^6 + o(x^6)) \\ & \underset{x \rightarrow 0}{=} (a + bx + cx^2)(1 - dx + (d^2 - e)x^2 + (-d^3 + 2de)x^3 + (d^4 - 3d^2e + e^2)x^4 \\ & \quad + (-d^5 + 4d^3e - 3de^2)x^5 + (d^6 - 5d^4e + 6d^2e^2 - e^3)x^6 + o(x^6)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a + bx + cx^2}{1 + dx + ex^2} & \underset{x \rightarrow 0}{=} a + (b - ad)x + (c - bd + a(d^2 - e))x^2 + (-cd + b(d^2 - e) + a(-d^3 + 2de))x^3 \\ & \quad + (c(d^2 - e) + b(-d^3 + 2de) + a(d^4 - 3d^2e + e^2))x^4 \\ & \quad + (c(-d^3 + 2de) + b(d^4 - 3d^2e + e^2) + a(-d^5 + 4d^3e - 3de^2))x^5 + \\ & \quad + (c(d^4 - 3d^2e + e^2) + b(-d^5 + 4d^3e - 3de^2) + a(d^6 - 5d^4e + 6d^2e^2 - e^3))x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

(b) On sait que $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^6)$. Le développement limité est unique.

On peut donc identifier, cela conduit nécessairement à :

$$\begin{aligned} a = 1, \quad b - ad = 0 \Rightarrow b = d, \quad (c - bd + a(d^2 - e)) &= -\frac{1}{2} \Rightarrow c - e = -\frac{1}{2} \\ -cd + b(d^2 - e) + a(-d^3 + 2de) &= 0 \Rightarrow (-c + e)d = 0 \Rightarrow d (= b) = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{24} = c(d^2 - e) + b(-d^3 + 3de) + a(d^4 - 3d^2e + e^2) = -ce + e^2 = e(e - c) = \frac{1}{2}e \Rightarrow e = \frac{1}{12}, c = e - \frac{1}{2} = -\frac{5}{12}$$

On trouve alors que le coefficient devant x^5 et x^6 sont respectivement :

$$c(-d^3 + 2de) + b(d^4 - 3d^2e + e^2) + a(-d^5 + 4d^3e + 3de^2) = 0$$

$$c(d^4 - 3d^2e + e^2) + b(-d^5 + 4d^3e + 3de^2) + a(d^6 - 5d^4e + 6d^2e^2 - e^3) = ce^2 - e^3 = \frac{-5 - 1}{144 \times 12} = -\frac{1}{288}$$

On trouve donc comme meilleure solution :

$$\cos(x) = \frac{1 - \frac{5}{12}x^2}{1 + \frac{1}{12}x^2} + O(x^6)$$

Il n'existe pas nécessairement des approximants de Padé à tout ordre. (Pour en trouver : cf. III.)
 Nous pouvons néanmoins montrer qu'il ne peut, au plus, en exister qu'un seul, sous forme normalisée.

3. Supposons que $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ approche f en 0 à l'ordre $p + q$ avec $\deg P_1, \deg P_2 \leq p$, et $\deg Q_1, \deg Q_2 \leq q$.

On a donc

$$\frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_2}{Q_2} = \left(\frac{P_1}{Q_1} - f \right) + \left(f - \frac{P_2}{Q_2} \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{p+q}) + o(x^{p+q}) = o(x^{p+q})$$

Notons $R = P_1Q_2 - P_2Q_1$, c'est un polynôme de degré d inférieur à $p + q$.

Supposons que $R \neq 0$ et notons $m = \min\{k \mid [R]_k \neq 0\}$, i.e. $R = [R]_m X^m + \sum_{k=m+1}^d [R]_k X^k$.

Donc $R(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} [R]_m x^m$ avec $0 \leq m \leq p + q$.

De même, il existe $k \leq 2q$ et $\alpha_k \neq 0$ tel que $Q_1(x)Q_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha_k x^k$.

Or on a $\frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_2}{Q_2} = \frac{R}{Q_1Q_2}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{[R]_m}{\alpha} x^{m-k}$.

Et $x^{m-k} = o(x^{p+q}) \Rightarrow p + q < m - k \Rightarrow p + q < m \leq p + q$. Contradiction.

$$\text{Donc } R = 0 \text{ et } \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}.$$

Or on a vu qu'il n'y a une unique écriture normalisée pour chaque fraction rationnelle.

Il existe au plus un seul approximant de PADÉ à tout ordre pour f

II. Division suivant les puissances croissantes

1. Existence et unicité de la division selon les puissances croissantes.

Il s'agit de montrer que :

Pour tout $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B(0) \neq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

il existe un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ_n + X^{n+1}R_n$ avec $\deg Q_n \leq n$.

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On note $r = \deg A$ et $m = \deg B$

- (a) Unicité.

On suppose que $BQ_n + X^{n+1}R_n = 0$, avec $B(0) \neq 0$ et $\deg Q_n \leq n$.

Comme $B(0) \neq 0$, alors X ne divise par B , mais X est irréductible, donc $X \wedge B = 1$.

Puis $X^{n+1} \mid -BQ_n$, donc d'après le lemme de Gauss : $X^{n+1} \mid Q_n$.

Mais $\deg Q_n < n+1 = \deg(X^{n+1})$, donc la seule possibilité est que $Q_n = 0$.

Et ainsi, $X^{n+1}R_n = 0$, donc $R_n = 0$.

$$\boxed{\text{Donc } Q_n = R_n = 0.}$$

Supposons maintenant que $A = BQ_n + X^{n+1}R_n = B\tilde{Q}_n + X^{n+1}\tilde{R}_n$.

Par soustraction : $B(Q_n - \tilde{Q}_n) + X^{n+1}(R_n - \tilde{R}_n) = 0$ avec $B(0) \neq 0$ et $\deg(Q_n - \tilde{Q}_n) \leq n$.

On retrouve exactement les conditions précédentes : $Q_n - \tilde{Q}_n = 0 = R_n - \tilde{R}_n$.

L'algorithme de la division selon les puissances croissantes donne (au plus) un seul résultat.

- (b) Existence. On note $\tilde{B} = X^m B(\frac{1}{X})$.

On peut supposer que $B = \sum_{k=0}^m b_k X^k$, on a donc

$$\tilde{B} = X^m \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{X^k} = \sum_{k=0}^m b_k X^{m-k} = \sum_{h=0}^m b_{m-h} X^h$$

$$\boxed{B \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \deg B = m.}$$

- (c) On suppose également que $A = \sum_{k=0}^r a_k X^k$. Donc

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= X^{n+m} \sum_{k=0}^r a_k \frac{1}{X^k} = \sum_{k=0}^r a_k X^{n+m-k} = \sum_{k=0}^{n+m} a_k X^{n+m-k} + \frac{X^{r-n-m}}{X^{r-n-m}} \sum_{k=n+m+1}^r a_k X^{n+m-k} \\ &= \underbrace{\sum_{h=0}^{n+m} a_{n+m-h} X^h}_{\tilde{A}_1} + \frac{1}{X^{r-n-m}} \underbrace{\sum_{k=n+m+1}^r a_k X^{r-k}}_{\tilde{A}_2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\tilde{A} = \tilde{A}_1 + \frac{\tilde{A}_2}{X^{r-n-m}} \text{ où } \deg(\tilde{A}_1) \leq n+m \text{ et } \deg(\tilde{A}_2) \leq r-n-m-1.}$$

Evidemment, $\tilde{A}_2$ est le polynôme nul si $r < n+m+1$.

- (d) $\deg \tilde{R} < \deg \tilde{B}$, donc $\deg(\tilde{R}) < \deg(\tilde{Q}\tilde{B})$,

Ainsi $\deg(\tilde{A}_1) = \deg(\tilde{Q}\tilde{B}) = \deg \tilde{Q} + \deg \tilde{B}$.

$$\boxed{\text{Alors } \deg \tilde{Q} = \deg(\tilde{A}_1) - \deg(\tilde{B}) \leq n+m-m = n.}$$

- (e) On a donc :

$$X^{n+m} A(\frac{1}{X}) = \tilde{A} = \tilde{A}_1 + \frac{X^{n+m}}{X^r} \tilde{A}_2 = \tilde{Q}\tilde{B} + \tilde{R} + \frac{X^{n+m}}{X^r} \tilde{A}_2$$

Et donc en remplaçant $\tilde{B}$ et $\tilde{Q}$:

$$X^{n+m} A(\frac{1}{X}) = X^n Q_n(\frac{1}{X}) X^m B(\frac{1}{X}) + X^m R_n(\frac{1}{X}) + \frac{X^{n+m}}{X^r} \tilde{A}_2$$

En simplifiant par X^{n+m} (i.e factorisant) et en composant à l'intérieur par $\frac{1}{X}$:

$$A(X) = Q_n(X)B(X) + X^n R_n(X) + X^r \tilde{A}_2(\frac{1}{X})$$

Notons que $\deg \tilde{R}_n < \deg \tilde{B} = m$, donc R_n est bien un polynôme.

Et si $d = \deg \tilde{A}_2$, on sait que $d \leq r - n - m - 1$ et $\tilde{A}_2 = \sum_{k=0}^d \alpha_k X^k$,

$$\text{Donc } X^r \tilde{A}_2 \left(\frac{1}{X} \right) = \sum_{k=0}^d \alpha_k X^{r-k} = \sum_{h=r-d}^r \alpha_{r-h} X^h.$$

Et donc $X^r \tilde{A}_2 \left(\frac{1}{X} \right)$ se factorise par X^{r-d} .

Mais $r - d \geq r - (r - n - m - 1) = n + m + 1$. Donc $X^r \tilde{A}_2 \left(\frac{1}{X} \right)$ se factorise par X^n .

La division selon les puissances croissantes existe bien.

2. Mise en pratique.

(a)

$$\begin{array}{ccccccccc|cccc} 7 & +8X & +10X^2 & +4X^3 & & & & & & 1 & +2X & +3X^2 & +2X^3 & +X^4 \\ & -6X & -11X^2 & -10X^3 & -7X^4 & & & & & 7 & -6X & +X^2 & +6X^3 & \\ & & X^2 & +8X^3 & +5X^4 & +6X^5 & & & & & & & & \\ & & & 6X^3 & 2X^4 & +4X^5 & -X^6 & & & & & & & \\ & & & & -10X^4 & -14X^5 & -13X^6 & -6X^7 & & & & & & \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ccccccccc|cccc} 1 & & -aX^2 & & & & & & & 1 & & -bX^2 & & \\ & & (b-a)X^2 & & & & & & & 1 & + (b-a)X^2 & + b(b-a)X^4 & + b^2(b-a)X^6 & \\ & & & b(b-a)X^4 & & & & & & & & & & \\ & & & & b^2(b-a)X^6 & & & & & & & & & \\ & & & & & b^3(b-a)X^8 & & & & & & & & \end{array}$$

On a alors avec $b - a = \frac{-1}{2}$ et $b(b - a) = \frac{1}{24} : b = \frac{-1}{12}, a = \frac{5}{12}$.

On retrouve $(1 - \frac{5}{12}x^2) = (1 + \frac{1}{12}x^2)(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{48}x^6) + \frac{1}{96}x^8$.

3. Exploitations.

(a) On applique l'algorithme précédent, on sait que $2 \cos^2 \theta - 1 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta)$.

Et plus généralement : $2 \cos k\theta \times \cos \theta = \cos((k+1)\theta) + \cos(k-1)\theta$:

$$\begin{array}{ccccccccc|cccc} 1 & & -X^2 & & & & & & & 1 & -2X \cos \theta & & +X^2 \\ 2X \cos \theta & & -2X^2 & & & & & & & 1 & +2X \cos \theta & +2 \cos(2\theta)X^2 & +2 \cos(3\theta)X^3 \\ & 2 \cos(2\theta)X^2 & -2X^3 \cos \theta & & & & & & & & & & \\ & & 2 \cos 3\theta X^3 & -2 \cos(2\theta)X^4 & & & & & & & & & \\ & & & 2 \cos(4\theta)X^4 & -2 \cos(3\theta)X^5 & & & & & & & & \end{array}$$

car $-2 \cos \theta X^3 + 4X^3 \cos \theta \cos(2\theta) = -2 \cos \theta X^3 + 2X^3(\cos(3\theta) + \cos \theta) = 2 \cos 3\theta X^3$
et plus généralement, pour tout k :

$$-2 \cos k\theta X^{k+2} + 4X^{k+2} \cos \theta \cos((k+1)\theta) = -2 \cos k\theta X^{k+2} + 2X^{k+2}(\cos((k+2)\theta) + \cos k\theta) = 2 \cos(k+2)\theta X^{k+2}$$

On trouve donc, pour tout $n \geq 1$:

$$1 - X^2 = (1 - 2X \cos \theta + X^2) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) X^k \right) + 2(\cos((n+1)\theta) X^{n+1} - \cos(n\theta) X^{n+2})$$

Et en particulier en $X = 1$ et $\theta \neq 0[\pi]$ i.e. $\cos^2 \theta \neq 1$:

$$0 = 2(1 - \cos \theta) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos k\theta \right) + 2(\cos(n+1)\theta - \cos n\theta)$$

Donc

$$1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{1 - \cos \theta}$$

- (b) Soit $P = 1 + 2X + 3X^2 + 3X^3 + 2X^4 + X^5$ et $Q = X^5$. $P(0) = 1$, donc X ne divise par P : $P \wedge X = 1$ et donc $P \wedge X^5 = 1$.

$$P \wedge Q = 1$$

On va diviser 1 par P , à l'ordre 5

$$\begin{array}{cccccccc|cccc} 1 & & & & & & & & 1 & +2X & +3X^2 & +3X^3 & +2X^4 & +X^5 \\ & -2X & -3X^2 & -3X^3 & -2X^4 & -X^5 & & & 1 & -2X & +X^2 & X^3 & -X^4 & \\ & & X^2 & +3X^3 & +4X^4 & +3X^5 & +2X^6 & & & & & & & \\ & & & X^3 & +X^4 & & & -X^7 & & & & & & \\ & & & & -X^4 & -3X^5 & -3X^6 & -3X^7 & -X^8 & & & & & \\ & & & & & -X^5 & & & +X^8 & +X^9 & & & & \end{array}$$

On trouve donc

$$1 = (1 - 2X + X^2 + X^3 - X^4)P + (-1 + X^3 + X^4)Q$$

Bien adaptée, lorsqu'on connaît un DL de f à l'ordre $p + q$, par l'algorithme de la division suivant les puissances croissantes, on peut trouver un candidat (P, Q) pour être un approximant de PADÉ de f .

III. Fractions continues polynomiales

1. Groupe des homographies. On note $\mathcal{G} = \{H_{A,B,C,D} \mid A, B, C, D \in \mathbb{L}, AD - BC \neq 0\}$.

- (a) Il suffit de faire le calcul. Soient $(A, B, C, D), (A', B', C', D') \in \mathbb{L}^4$ tel que (C, D) ,

$$H_{A,B,C,D} \circ H_{A',B',C',D'} = \frac{A \frac{A'Y + B'}{C'Y + D'} + B}{C \frac{A'Y + B'}{C'Y + D'} + D} = \frac{(AA' + BC')Y + (AB' + BD')}{(CA' + DC')Y + (CB' + DD')}$$

$$H_{A,B,C,D} \circ H_{A',B',C',D'} = H_{AA'+BC', AB'+BD', CA'+DC', CB'+DD'}$$

Après calculs

$$A''D'' - B''C'' = (AD - BC)(A'D' - B'C') \neq 0$$

car nous sommes dans un corps (donc anneau intègre). Puis

$$(C'', D'') = (0, 0) \Rightarrow A''D'' - B''C'' = 0$$

Par contraposée, nécessairement : $(C'', D'') \neq (0, 0)$.

$$\text{Ainsi } (C'', D'') \neq (0, 0) \text{ et } A''D'' - B''C'' \neq 0.$$

🔗 Remarques !

🔗 On notera que ce sont les mêmes formules que pour le produit matriciel

- (b) • On a vu la stabilité.
• L'application $\circ$ n'est pas commutatif, mais bien associatif (comme pour les fractions rationnelles, comme pour les polynômes).
• Il reste à trouver l'élément neutre : $H_{1,0,0,1} = T$ est neutre (on a bien $AD - BC = 1 \neq 0$).
• Et enfin l'inversion :

Comme, il s'agit d'une application comparable à celle du produit matriciel : l'inverse de $H_{A,B,C,D}$ est $H_{D,-B,-C,A}$:

$$H_{A,B,C,D} \circ H_{D,-B,-C,A} = H_{AD-BC, -AB+BA, CD-DC, -CB+DA} = H_{AD-BC, 0, 0, AD-BC} = H_{1,0,0,1}$$

car $\mathbb{L}$ est un corps commutatif.

$$(\mathcal{G}, \circ) \text{ est un groupe.}$$

On suppose maintenant que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(X)$.

On considère deux suites. La première $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels et la seconde $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de fractions rationnelles ($M_k \in \mathbb{K}(X)$).

2. Décomposition de la fraction continue.

(a) On démontre le résultat par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n : \ll \exists A_n, B_n, C_n, D_n \in$

$$\mathbb{K}(X), \text{ tel que } M_0 + \frac{X^{a_0}}{M_1 + \frac{X^{a_1}}{M_2 + \frac{X^{a_2}}{\ddots + \frac{X^{a_{n-1}}}{M_n + T}}}} = H_{A_n, B_n, C_n, D_n}(T) \gg.$$

— $\mathcal{P}_0$ est vraie avec $A_0 = 1, B_0 = M_0, C_0 = 0$ et $D_0 = 1$.

— $\mathcal{P}_1$ est vraie, car $M_0 + \frac{X^{a_0}}{M_1 + T} = \frac{M_0 T + M_0 M_1 + X^{a_0}}{T + M_1}$ est vraie avec $A_0 = M_0, B_0 = M_0 M_1 + X^{a_0}, C_0 = 1$ et $D_0 = M_1$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors en prenant $T' = \frac{X^{a_n}}{M_{n+1} + T} = H_{0, X^{a_n}, 1, M_{n+1}}$,

$$M_0 + \frac{X^{a_0}}{M_1 + \frac{X^{a_1}}{M_2 + \frac{X^{a_2}}{\ddots + \frac{X^{a_{n-1}}}{M_n + \frac{X^{a_n}}{M_{n+1} + T}}}}} = M_0 + \frac{X^{a_0}}{M_1 + \frac{X^{a_1}}{M_2 + \frac{X^{a_2}}{\ddots + \frac{X^{a_{n-1}}}{M_n + T'}}}} = H_{A_n, B_n, C_n, D_n}(T')$$

Donc par stabilité par produit, on trouve $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie avec

$$H_{A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}} = H_{A_n, B_n, C_n, D_n} \circ H_{0, X^{a_n}, 1, M_{n+1}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists A_n, B_n, C_n, D_n \in \mathbb{K}(X), \text{ tel que } M_0 + \frac{X^{a_0}}{M_1 + \frac{X^{a_1}}{M_2 + \frac{X^{a_2}}{\ddots + \frac{X^{a_{n-1}}}{M_n + T}}}} = H_{A_n, B_n, C_n, D_n}(T)$$

On prendra pour $H_{A_0, B_0, C_0, D_0}(T) = M_0 + T$, puis $H_{A_1, B_1, C_1, D_1}(T) = M_0 + \frac{X^{a_0}}{M_1 + T}, \dots$

(b) On aurait pu exploiter la relation de récurrence trouvée précédemment :

○ Remarques !

⚡ En effet : $A_{n+1} = 0A_n + 1B_n = B_n, B_{n+1} = X^{a_n}A_n + M_{n+1}B_n$.

⚡ et $C_{n+1} = 0C_n + 1D_n = D_n, D_{n+1} = X^{a_n}C_n + M_{n+1}D_n$

mais au cas où le lecteur n'ait pas réussi la question précédente, voici une autre stratégie.
En substituant 0 à T :

$$H_{A_n, B_n, C_n, D_n}(0) = \frac{B_n}{D_n} = M_0 + \frac{X^{a_0}}{M_1 + \frac{X^{a_1}}{M_2 + \frac{X^{a_2}}{\ddots + \frac{X^{a_{n-1}}}{M_n}}}}$$

Ce résultat est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et en substituant t à T , puis $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H_{A_n, B_n, C_n, D_n}(t) = \frac{A_n}{C_n} = M_0 + \frac{X^{a_0}}{M_1 + \frac{X^{a_1}}{M_2 + \frac{X^{a_2}}{\ddots + M_{n-1} + 0}}} = \frac{B_{n-1}}{D_{n-1}}$$

Et enfin en substituant $\frac{X^{a_n}}{M_{n+1}}$ à T :

$$\frac{A_n X^{a_n} + M_{n+1} B_n}{C_n X^{a_n} + M_{n+1} D_n} = H_{A_n, B_n, C_n, D_n}\left(\frac{X^{a_n}}{M_{n+1} + T}\right) = M_0 + \frac{X^{a_0}}{M_1 + \frac{X^{a_1}}{M_2 + \frac{X^{a_2}}{\ddots + \frac{X^{a_n}}{M_{n+1}}}}} = \frac{B_{n+1}}{D_{n+1}}$$

$$\boxed{\frac{B_{n-1}}{D_{n-1}} = \frac{A_n}{C_n} \quad \frac{B_{n+1}}{D_{n+1}} = \frac{A_n X^{a_n} + M_{n+1} B_n}{C_n X^{a_n} + M_{n+1} D_n}}$$

○ Remarques !

⚡ On a alors une sorte de relation d'ordre 2 entre B_{n+1} , B_n et B_{n-1} (i.e A_n à un coefficient près.

⚡ Comme on ne connaît pas ce coefficient, on part maintenant dans l'autre sens, donc les questions suivantes.

3. Réciproquement.

(a) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n : \ll M_0 + \frac{X^{a_0}}{M_1 + \frac{X^{a_1}}{M_2 + \frac{X^{a_2}}{\ddots + \frac{X^{a_{n-1}}}{M_n + t}}}} = \frac{P_{n-1}t + P_n}{Q_{n-1}t + Q_n} \gg$

— $M_0 + t = \frac{1t + M_0}{0t + 1} = \frac{P_{-1}t + P_0}{Q_{-1}t + Q_0}$. Donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

— Non nécessaire : $M_0 + \frac{X^{a_0}}{M_1 + t} = \frac{M_0t + (M_0M_1 + X^{a_0}1)}{1t + M_0} = \frac{P_0t + P_1}{Q_0t + Q_1}$. Donc $\mathcal{Q}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}_n$ est vraie.

$$M_0 + \frac{X^{a_0}}{M_1 + \frac{X^{a_1}}{M_2 + \frac{X^{a_2}}{\ddots + \frac{X^{a_{n-1}}}{M_n + \frac{X^{a_n}}{M_{n+1} + t}}}}} = \frac{P_{n-1} \frac{X^{a_n}}{M_{n+1} + t} + P_n}{Q_{n-1} \frac{X^{a_n}}{M_{n+1} + t} + Q_n} = \frac{P_n t + (M_{n+1} P_n + X^{a_n} P_{n-1})}{Q_n t + (M_{n+1} Q_n + X^{a_n} Q_{n-1})}$$

Donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{K} \quad M_0 + \frac{X^{a_0}}{M_1 + \frac{X^{a_1}}{M_2 + \frac{X^{a_2}}{\ddots + \frac{X^{a_{n-1}}}{M_n + t}}}} = \frac{P_{n-1}t + P_n}{Q_{n-1}t + Q_n}}$$

(b) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= P_{n+2}Q_{n+1} - P_{n+1}Q_{n+2} \\ &= M_{n+2}P_{n+1}Q_{n+1} + X^{a_{n+1}}P_nQ_{n+1} - P_{n+1}M_{n+2}Q_{n+1} + P_{n+1}X^{a_{n+1}}Q_n \\ &= -X^{a_{n+1}}U_n \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{U_n}{U_{-1}} = \prod_{k=0}^n \frac{U_k}{U_{k-1}} = \prod_{k=0}^n (-X^{a_k}) = (-1)^{n+1} X^{\sum_{k=0}^n a_k}$$

Puis comme $U_{-1} = P_0Q_{-1} - P_{-1}Q_0 = -1$, on trouve $U_n = (-1)^n X^{\sum_{k=0}^n a_k}$.

Et donc

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{U_n}{Q_n Q_{n+1}} = \frac{(-1)^n X^{\sum_{i=0}^n a_i}}{Q_n Q_{n+1}}}$$

4. On associe alors à f (et donc à (M_n) et (a_n)), les suites P_n et Q_n définies précédemment.

(a) Soit $t \in \mathcal{D}$.

Maintenant, ce qui est plus compliqué, les deux indéterminés sont substitués : t à X et $g(t)$ à T . On trouve P_{n+1} comme polynôme en t (plus exactement fonction polynomiale) avec relation de récurrence :

$$P_{n+1}(t) = M_{n+1}P_n(t) + t^{a_n}P_{n-1}(t)$$

$$Q_{n+1}(t) = M_{n+1}Q_n(t) + t^{a_n}Q_{n-1}(t)$$

On a donc $Q_{n+1}(0) = M_{n+1}Q_n(0)$ et donc (comme précédemment) $Q_n(0) = Q_0(0) \prod_{i=1}^n M_i$.

Et donc

$$\boxed{Q_n(0)Q_{n+1}(0) = M_{n+1} \left(\prod_{i=1}^n M_i \right)^2}$$

(b) A FINIR!!