Devoir surveillé n°8
CORRECTION

Exercice - Vecteur type d'une permutation

1. La décomposition en produit de cycles donne

$$\sigma_1 = (1\ 4\ 6\ 10\ 8\ 5\ 7)(2\ 9\ 3) \qquad \sigma_2 = (1\ 13\ 8\ 12\ 3\ 9\ 10)(2\ 4\ 11\ 5)(6)(7)$$

/1,5

$\boxed{\text{Donc } \Lambda(\sigma_1) = (0,0,1,0,0,0,1,0,0,0) \text{ et } \Lambda(\sigma_2) = (2,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0).}$

2. On a simplement /1

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\sigma) \text{ est le nombre de cycles dans la permutation } \sigma \text{ (y compris points fixes).}}$$

$i\lambda_i(\sigma)$ est le nombre d'éléments d'un i-cycle, multiplié par le nombre de i-cycles de σ.
Donc il s'agit aussi du nombre d'éléments de $\mathbb{N}_n$ dans un i-cycle.
Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\lambda_i(\sigma)$ est le nombre d'élément qui se trouve dans un i-cycle pour $i \leqslant n$.
Par ailleurs tout élément de $\mathbb{N}_n$ se trouve dans un et un seul i-cycle. /2

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i\lambda_i(\sigma) = n}$$

3. Si $\sigma = c_1 \circ c_2 \cdots \circ c_k$, avec une décomposition de σ en produit de k cycles à supports disjoint $\epsilon(\sigma) = (-1)^{\sum_{i=1}^{k}(\ell_i - 1)}$ où $\ell_i = \text{card}(c_i)$.
Donc seuls les cycles de cardinaux pairs ($\ell_i - 1$ impair) influencent la valeur de $\epsilon(\sigma)$.
En les rangeants selon leur taille, on trouve

$$\boxed{\epsilon(\sigma) = \prod_{2|i} (-1)^{\lambda_i(\sigma)}}$$

Mais on sait aussi que $\epsilon(\sigma) = (-1)^{\sum_{i=1}^{k}(\ell_i - 1)} = (-1)^{n-k}$ où k est le nombre de cycles distincts (en tenant compte des points fixes). /1,5 Au choix

Or $k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\sigma)$ d'après la question précédente. D'où une seconde formule :

$$\boxed{\epsilon(\sigma) = (-1)^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(\sigma)}}$$

4. Nous cherchons le nombre de permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ de vecteur-type $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$.
Nous allons appliquer le principe de décomposition pour dénombrer cet ensemble.
Pour décrire une telle permutation, on peut commencer par
   — Mettre les éléments de $\mathbb{N}_n$ dans λ_1 paquets de taille 1, λ_2 paquets de taille 2…λ_n paquets de taille n.
   Pour disposer ces éléments, il y a $n!$ possibilités. On note L, l'ensemble de ces distributions.
   Donc $\text{card}(L) = n!$.
   — MAIS, plusieurs de ces dispositions conduisent à la même permutation σ.
   Il faut donc associer ensemble ces éléments. Il y a deux types d'association possibles :
      — Pour $\ell_1, \ell_2 \in L$, on a $\ell_1 \equiv_1 \ell_2$ si on passe de ℓ_1 à ℓ_2 en permutant de manière circulaire les éléments d'un même paquet.
      Il y a i permutation circulaire possibles pour chaque paquets de taille i. Et il y a $\lambda_i(\sigma)$ paquets de taille i. Il a donc $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i^{\lambda_i}$ permutations possibles.
      Toutes les classes d'équivalence ont la même taille. Il s'agit donc de diviser par $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i^{\lambda_i}$

— Pour $\ell_1, \ell_2 \in L$, on a $\ell_1 \equiv_2 \ell_2$ si on passe de ℓ_1 à ℓ_2 en permutant les λ_i paquets de même longueurs (i).
Il y a $\lambda_i!$ permutation circulaire possibles pour chaque groupe de paquets de taille i.
Toutes les classes d'équivalence ont la même taille. Il s'agit donc de diviser par $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i!$

On trouve donc la formule de Cauchy

$$\boxed{\text{le nombre de permutation } \sigma \text{ de } \mathfrak{S}_n \text{ de vecteur-type } (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \text{ est } \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}\left(i_i^{\lambda}(\lambda_i!)\right)}.}$$

5. Si σ est une permutation d'ordre n, alors elle est composée de cycles c_i d'ordre k avec $k|n$.
Or ici $n = 3$ est un nombre premiers donc c_i n'est composé que de 3-cycles et de points fixes.
On a donc $\Lambda(\sigma) = (a, 0, b, 0, 0, 0 \dots, 0) \in \mathbb{N}^{10}$ avec $3b + a = 10$
i.e. $\Lambda(\sigma) = (10 - 3b, 0, b, 0, 0, 0 \dots, 0)$ avec $1 \leqslant b \leqslant 3$.
D'après la formule de Cauchy (question précédente), on trouve

$$\begin{aligned} S &= \underbrace{\frac{10!}{(1^7 3^1 (7!1!))}}_{k=1} + \underbrace{\frac{10!}{(1^4 3^2 (4!2!))}}_{k=2} + \underbrace{\frac{10!}{(1^1 3^3 (1!3!))}}_{k=3} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{9 \cdot 2} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{27} = 240 + 8400 + 22400 = 31\,040 \end{aligned}$$

/3

$$\boxed{\text{Il y a } 23\,690 \text{ permutations de } \mathfrak{S}_{10} \text{ d'ordre 3.}}$$

Problème - Réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$ - PC - Centrale 2019

A. Exemples de sous-algèbres

1. Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
   (a) On a la caractérisation $M \in T_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \forall\, i > j,\ {}^i[M]_j = 0$.
   Respectivement : $M \in T_n^+(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \forall\, i \geqslant j,\ {}^i[M]_j = 0$.
   Or pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, l'application $\phi_{i,j} : M \mapsto^i [M]_j$ est une forme linéaire.
   Donc $T_n(\mathbb{K}) = \bigcap_{i>j} \text{Ker } \phi_{i,j}$ resp. $T_n^+(\mathbb{K}) = \bigcap_{i \geqslant j} \text{Ker } \phi_{i,j}$ est un $\mathbb{K}$ev (intersection).
   C'est par ailleurs une sous-algèbre :
   Si $M, N \in T_n(\mathbb{K})$, et $i > j$:

$$\phi_{i,j}(MN) =^i [MN]_j = \sum_{k=1}^{n} {}^i[M]_k {}^k[N]_j = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{{}^i[M]_k}_{=0} {}^k[N]_j + \sum_{k=i}^{n} {}^i[M]_k \underbrace{{}^k[N]_j}_{=0\ k \geqslant i > j} = 0$$

   Si $M, N \in T_n^+(\mathbb{K})$, en plus du cas précédent, on a pour $i = j$:

$$\phi_{i,i}(MN) =^i [MN]_i = \sum_{k=1}^{n} {}^i[M]_k {}^k[N]_i = \sum_{k \neq i}^{i-1} {}^i[M]_k {}^k[N]_i + {}^i[M]_i {}^i[N]_i = 0$$

   Donc $MN \in T_n(\mathbb{K})$, resp. $MN \in T_n^+(\mathbb{K})$. /2

$$\boxed{T_n(\mathbb{K}) \text{ et } T_n^+(\mathbb{K}) \text{ sont des sous-algèbres de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

   (b) Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{K})$.
   Alors

$$A \times A' = \begin{pmatrix} \cdot & ab' + bc' \\ ba' + cb' & \cdot \end{pmatrix}$$

   Il n'y a aucune raison qu'elle soit symétrique (exemple avec $a = 0 = c'$ et $b = a' = c = b' = 1$).
   De même considérons les matrices $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 0 & b' \\ -b' & 0 \end{pmatrix} \in A_2(\mathbb{K})$.
   Alors

$$B \times B' = \begin{pmatrix} -bb' & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

   Il n'y a aucune raison qu'elle soit antisymétrique (exemple avec $b = b' = 1$). /1,5

$$\boxed{\text{Les sous-ensembles } S_2(\mathbb{K}) \text{ et } A_2(\mathbb{K}) \text{ ne sont pas des sous-algèbres de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).}$$

(c) On suppose $n \geqslant 3$.
On peut exploiter un raisonnement par blocs.
Notons (par blocs) $A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{n-2} \end{pmatrix}$, $A_1' = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0_{n-2} \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{K})$.
Alors $A_1 \times A_1' = \begin{pmatrix} AA' & 0 \\ 0 & 0_{n-2} \end{pmatrix} \notin S_n(\mathbb{K})$.
Notons (par blocs) $B_1 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0_{n-2} \end{pmatrix}$, $B_1' = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0_{n-2} \end{pmatrix} \in A_n(\mathbb{K})$.
Alors $B_1 \times B_1' = \begin{pmatrix} BB' & 0 \\ 0 & 0_{n-2} \end{pmatrix} \notin A_n(\mathbb{K})$. /2

$$\boxed{\text{Les sous-ensembles } S_n(\mathbb{K}) \text{ et } A_n(\mathbb{K}) \text{ ne sont pas des sous-algèbres de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

2. Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$.
(a) Montrons d'abord qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel.
• $0_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{A}_F$ car pour tout $x \in F$, $0(x) = 0 \in F$.
•. Soient $u_1, u_2 \in \mathcal{A}_F$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.
$\forall\, x \in F$, $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)(x) = \lambda_1 \underbrace{u_1(x)}_{\in F} + \lambda_2 \underbrace{u_2(x)}_{\in F} \in F$, car F sev de E.
Montrons la stabilité multiplicative (composition).
•. Soient $u_1, u_2 \in \mathcal{A}_F$,
$\forall\, x \in F$, $(u_1 \circ u_2)(x) = u_1(\underbrace{u_2(x)}_{\in F}) \in F$ car u_2 puis $u_1 \in \mathcal{A}_F$. /1

$$\boxed{\mathcal{A}_F \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(E).}$$

(b) E est de dimension finie, $F \subset E$ également.
Considérons $\mathcal{B}_1$ une base de F et complétons là en une base $\mathcal{B}$ de E.
Pour des raisons de dimensions ($\dim E = n$, $\dim F = p$), on peut supposer

$$\mathcal{B} = \big(\underbrace{e_1, e_2, \dots, e_p}_{\text{base} de F}, e_{p+1}, e_{p+2}, \dots e_n\big)$$

On a les équivalences : /2

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{A}_F &\iff \forall\, k \leqslant p, u(e_k) \in F = \mathrm{vect}(e_1, \dots e_k) \\ &\iff \exists\, U_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), U_2 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R}), U_3 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R}) \text{ telles que } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ 0 & U_3 \end{pmatrix} \\ &\iff \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{vect}\,(E_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}_p^2 \cup \mathbb{N}_n \times [\![p+1,n]\!]} \end{aligned}$$

Or la famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in A}$ est libre (pour tout $A \in \mathbb{N}_n^2$).
Donc $\mathcal{A}_F$ est <u>en bijection</u> avec un espace vectoriel $\mathrm{vect}\,(E_{i,j})_{(i,j)\in \mathbb{N}_p^2 \cup \mathbb{N}_n \times [\![p+1,n]\!]}$ qui possède /1
une base de $p^2 + n \times (n - (p+1) + 1) = p^2 + n^2 - np$ éléments.
On en déduit

$$\boxed{\dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2.}$$

(c) Ici, n est fixé et c'est p la variable. Donc on écrit en fonction de p. On a :

$$f_n(p) = n^2 - pn + p^2 = \left(p - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}n^2$$

Ce nombre est maximal lorsque $|p - \frac{n}{2}|$ est maximal donc p le plus distant de $\frac{n}{2}$ ie $p = 1$ ou $p = n - 1$.
Or $f_n(1) = n^2 - n + 1$ et $f_n(n-1) = n^2 - n^2 - n + n^2 - 2n + 1 = n^2 - n + 1$. /2

$$\boxed{\max_{1 \leq p \leq n-1} (n^2 - pn + p^2) = n^2 - n + 1}$$

3. Exemples de sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisable
(a) $0 \in \Gamma(\mathbb{K})$ donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est non vide.
Soient $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathbb{K})$.
Pour tout $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$, $\lambda A + \lambda' A' = \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda a' & -(\lambda b + \lambda' b') \\ \lambda b + \lambda' b' & \lambda a + \lambda' a' \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathbb{K})$.
Et $A \times A' = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(ab' + ba') \\ ab' + ba' & aa' - bb' \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathbb{K})$ /1,5

$$\boxed{\text{Donc } \Gamma(\mathbb{K}) \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).}$$

(b) On note $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (où $i^2 = -1$) et $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} 1 & -(-i) \\ -1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

/1

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}}$$

Puis /1

$$\boxed{P^{-1}MP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}$$

(c) Soit $A \in \Gamma(\mathbb{C})$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tel que $A = aI_2 + bM$ (M de la question précédente). Alors, par linéarité du calcul :

$$P^{-1}AP = P^{-1}(aI_2 + bM)P = a(P^{-1}I_2P) + b(P^{-1}MP) = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$$

P est indépendant de A (même matrice P pour toutes les matrices de $\Gamma(\mathbb{C})$. /1,5

$\boxed{\Gamma(\mathbb{C}) \text{ est une sous-algèbre diagonalisable de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).}$

B. Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Calcul des puissances de J

(a) On note que $J = J(0, 1, 0, \cdots 0)$ et comme $\varphi^2(e_j) = \begin{cases} e_{j+2} & \text{si } j \leqslant n-2 \\ e_{j+2-n} & \text{sinon} \end{cases}$, alors /1,5

$$\boxed{J = J(0, 1, \ldots 0) = J(e_2) \text{ et } J^2 = J(0, 0, 1, \ldots 0) = J(e_3) \text{ ou } J^2 = I_2 \text{ (si } n = 2).}$$

(b) Notons pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$, $\mathcal{P}_k$: « $J^k = J(e_{k+1})$ ».

— $\mathcal{P}_1$ (et $\mathcal{P}_2$) est vraie.

— Soit $k \leqslant n-2$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie.
Puisque $J^k = J(e_{k+1})$, on a pour tout $r \in \mathbb{N}_n$, $\varphi^k(e_r) = e_{k+r[n]}$ (addition modulo n).
Donc $\varphi^{k+1}(e_r) = \varphi(\varphi^k(e_r)) = e_{k+r+1[n]}$.
Donc $J^{k+1} = Mat_{(e_1,\ldots e_n)}(\varphi^{k+1}) = J(e_{k+2[n]})$

Puis $J^n = J \times J^{n-1} = J \times J(e_n) = I_n$ /2

$$\boxed{\forall\ k \in [\![2, n-1]\!], J^k = J(e_{k+1} \qquad J^n = I_n}$$

On trouve en particulier $J^n = I_n$, donc $T(J) = J^n - I_n = 0$. /1

$\boxed{T = X^n - 1 \text{ est annulateur de } J.}$

(c) Par addition linéaire : /1,5

$$\boxed{J(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J(e_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k}$$

2. Une base de $\mathcal{A}$

(a) D'après la question précédente, si $j \in \mathcal{A}$, $j \in \text{vect}(J^0, J^1, \ldots J^{n-1})$.
Et réciproquement, comme $J^k \in \mathcal{A}$, on peut affirmer que $\mathcal{A} = \text{vect}(J^0, J^1, \ldots J^{n-1})$.
Ainsi $(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}$.

Par ailleurs si $0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k J^k = J(\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-1})$,
on peut identifier les coefficients matriciel. Ainsi, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda_k = 0$.
Donc $(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ est une famille libre (de $\mathcal{A}$). /1,5

$\boxed{(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1}) \text{ est une base de } \mathcal{A}.}$

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $J \in \mathcal{A}$,

si M commute avec tout élément de $\mathcal{A}$, il commute avec J.

Réciproquement, supposons que $J \times M = M \times J$

Par récurrence ($k > 0$) : $J^k \times M = J \times J^{k-1}M = J \times MJ^{k-1} = M \times JJ^{k-1} = M \times J^k$.

Puis par distributivité : $M \times \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k M J^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k M = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \times M$.

Enfin comme (J^k) est une famille génératrice de $\mathcal{A}$, M commute avec tout élément de $\mathcal{A}$. /2

$$\boxed{M \text{ commute avec } J \text{ si et seulement si } M \text{ commute avec tout élément de } \mathcal{A}.}$$

(c) Soit $A, B \in \mathcal{A}$, il existe $(a_0, \dots a_{n-1}), (b_0, \dots b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tq $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$ et $B = \sum_{k=0}^{n-1} b_k J^k$.

On note $P_A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $P_B = \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$, donc $A = P_A(J)$ et $B = P_B(J)$

$$A \times B = P_A(J) \times P_B(J) = (P_A \times P_B)(J)$$

Par ailleurs, on sait que $J^n = I_n = J^0$. Notons $T = X^n - 1$, on a donc $T(J) = 0$.

Donc en notant R, le reste de la division euclidienne de $P_A \times P_B$ par T,

on a $P_B P_A = P_A P_B = QT + R$ et donc $(P_A P_B)(J) = Q(J)T(J) + R(J) = R(J)$.

Or $\deg R < \det T = n$, donc $A \times B = R(J) \in \mathcal{A}$. Ainsi $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre.

Mais on a mieux : comme $B \times A = (P_B P_A)(J) = R(J) = B \times A$, elle est commutative. /2+1

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ est une sous-algèbre commutative de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

3. Diagonalisation de J. On rappelle que $T = X^n - 1$ est annulateur de J et de φ.

On va démontrer que φ (et J) est diagonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, par analyse-synthèse.

(a) On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots e'_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$.

Nécessairement cela signifie (k-ième colonne) : /1

$$\boxed{\varphi(e'_k) = \lambda_k e'_k}$$

(b) On alors par récurrence (sur h), $\mathcal{Q}_h$: « $\varphi^h(e'_k) = \lambda^h e'_k$ ».

— Pour $h = 0$: $\varphi^0(e'_k) = \mathrm{id}(e'_k) = \lambda^0 e'_k$. Donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

— Soit $h \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{Q}_h$ est vraie.

$\varphi^{h+1}(e'_k) = \varphi(\lambda^h e'_k) = \lambda^h \varphi(e'_k) = \lambda^{h+1} e'_k$.

Donc $\mathcal{Q}_{h+1}$ est vraie. /2

En particulier pour $h = n$:

$$e'_k = \mathrm{id}(e'_k) = \varphi^n(e'_k) = \lambda^n e'_k$$

Mais la famille $\mathcal{B}'$ est une base, donc elle est libre donc nécessairement : $e'_k \neq 0$. /1,5

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}_n,\ \lambda_k^n = 1.}$$

On note $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $\mathbb{U}_n = \{\omega^k, k \in [\![0, n-1]\!]$.

La question précédente implique que les $\lambda_k \in \mathbb{U}_n$.

(c) Soit $x = \sum_{h=1}^{n} x_h e_h \in \mathbb{C}^n$.

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{Ker}\ (\varphi - \omega^k \mathrm{id}) \quad &\Longleftrightarrow \varphi(x) = \omega^k x \Longleftrightarrow \sum_{h=1}^{n} x_h \varphi(e_h) = \omega^k \sum_{h=1}^{n} x_h e_h \\
&\Longleftrightarrow x_n e_1 + \sum_{h=1}^{n-1} x_h e_{h+1} = \omega^k \sum_{h=1}^{n} x_h e_h \\
&\Longleftrightarrow (x_n - \omega^k x_1) e_1 + \sum_{h=1}^{n-1} (x_h - \omega^k x_{h+1}) e_{h+1} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \forall\ h \in \mathbb{N}_{n-1}, x_h = \omega^k x_{h+1} \text{ et } x_n = \omega^k x_1 \\
&\Longleftrightarrow \forall\ h \in \mathbb{N}_{n-1}, x_{h+1} = \omega^{-k} x_h = \omega^{n-k} x_h \text{ et } x_n = \omega^k x_1
\end{aligned}$$

car la famille $(e_1, e_2 \dots e_n)$ est libre.
Ce système se résout (de proche en proche - suite géométrique) :
$\forall\ h \in \mathbb{N}_n,\ x_h = \omega^{(h-1)(n-k)} x_1$
et on vérifie bien $x_n = \omega^{(n-1)(n-k)} x_1 = \omega^{-1(n-k)} x_1 = \omega^{k-n} x_1 = \omega^k x_1$.
Il y a donc une et une seule solution à l'équation et /2

$$\boxed{\text{Ker } (\varphi - \omega^k \text{id}) = \text{vect}(1, \omega^{-k}, \omega^{-2k} \dots \omega^{-(n-1)k}) \text{ est un espace vectoriel de dimension 1.}}$$

(d) Pour conclure, il faut voir si la famille $(e'_1, \dots e'_n)$ où $e'_k = (1, \omega^{-k}, \omega^{-2k} \dots \omega^{-(n-1)k})$ forme une base de $\mathbb{C}^n$.
On rappelle que $\varphi(e'_k) = \omega^k e'_k$.
Montrons qu'il s'agit d'une famille libre. Soit $\lambda_1, \dots \lambda_n$ tel que $\displaystyle\sum_{h=1}^{n} \lambda_h e'_h = 0$.
On peut alors composer par φ^s :

$$0 = \varphi^s(0) = \varphi^s\left(\sum_{h=1}^{n} \lambda_h e'_h\right) = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h \varphi^s(e'_h) = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h (\omega^h)^s e'_h \qquad (*)$$

Considérons le polynôme $R_k = \displaystyle\prod_{h \neq k} (X - \omega^h)$, on a pour tout $h \neq k$, $R_k(\omega^h) = 0$.

Il s'agit d'un polynôme de degré $n-1$, supposons que $R_k = \displaystyle\sum_{s=0}^{n-1} r_s X^s$.
Sommons alors les relations (*) précédentes avec les coefficients r_s :

$$0 = \sum_{s=0}^{n-1} r_s \times 0 = \sum_{s=0}^{n-1} r_s \sum_{h=1}^{n} \lambda_h (\omega^h)^s e'_h = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h \left(\sum_{s=0}^{n-1} r_s (\omega^h)^s\right) e'_h = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h \left(R_k(\omega^h)\right) e'_h$$

Or pour tout $h \neq k$, $R_k(\omega^h) = 0$, on trouve donc

$$0 = \lambda_k R_k(\omega^k) e'_k$$

Or $R_k(\omega^k) \neq 0$ et e'_k est un vecteur non nul. Nécessairement $\lambda_k = 0$.
Ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, donc $(e'_1, \dots e'_n)$ est une famille libre.
Il s'agit d'une famille libre de $n = \dim \mathbb{C}^n$ éléments de $\mathbb{C}^n$, c'en est une base.
Il existe donc une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale. /3

$$\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

4. Diagonalisation de $\mathcal{A}$

(a) Nous avons démontré que $\mathcal{A}$ est-il une sous-algèbre commutative de $\mathbb{R}$, en exploitant aucune autre propriété de $\mathbb{R}$ que celle d'être un corps classique donc le résultat obtenu se généralise à $\mathbb{C}$. /1

$$\boxed{\text{Le sous-ensemble } \mathcal{A} \text{ est-il une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

(b) On sait que φ est diagonalisable donc il existe une base $\mathcal{B}'$ telle que $Mat_{\mathcal{B}'}(\varphi) = D$ est diagonale .
En notant $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{id})$, on a

$$J = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{id}) Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\varphi) Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{id}) = PDP^{-1}$$

Donc en multipliant par P^{-1} à gauche et P à droite : /3

$$\boxed{\text{il existe } P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \text{ tel que } P^{-1}JP = D \text{ est diagonale}}$$

(c) Puis, par récurrence immédiate :

$$J^s = J \times J^{s-1} = PDP^{-1}PD^{s-1}P = PD^sP^{-1}$$

Or D^s est diagonale (comme produit de matrices diagonales).
Puis plus généralement, pour tout $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$:

$$P^{-1}AP = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P^{-1} J^k P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k$$

C'est une matrice diagonale, comme combinaison linéaire de matrices diagonales. /2

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } A \in \mathcal{A}, \text{ la matrice } P^{-1}AP \text{ est diagonale.}}$$

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ diagonalisable.}}$$

C. Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

1. Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) $\mathcal{A}^\perp \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $0_\mathcal{M} \in A^\perp$ car pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\text{tr}(0_\mathcal{M} \times A) = \text{tr}(0) = 0$.
Soient $B_1, B_2 \in \mathcal{A}^\perp$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Pour tout matrice $A \in \mathcal{A}$, par linéarité de tr :

$$\text{tr}\big(A^T \times (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)\big) = \lambda_1 \text{tr}(A^T B_1) + \lambda_2 \text{tr}(A^T B_2) = 0$$

Donc $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \in \mathcal{A}^\perp$. /1

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{A}^\perp \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

On note r sa dimension.

(b) Soit $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^\perp$.
Alors $\text{tr}(A^T A) = 0$. Mais ce calcul donne

$$0 = \text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} ({}^i[A^T A]_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} {}^i[A^T]_k {}^k[A]_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left({}^k[A]_i\right)^2$$

On trouve donc une somme de termes positifs, nulle ; ainsi tous ces termes sont nuls :
$\forall\ i, k \in \mathbb{N}_n$, ${}^k[A]_i = 0$ donc $A = 0$. /2

$$\boxed{\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^\perp = \{\emptyset\} \Longleftrightarrow \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp}$$

On a donc

$$\dim\left(\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp\right) = \dim \mathcal{A} + \dim \mathcal{A}^\perp = d + r$$

Or $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\dim\left(\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp\right) \leqslant \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$. /1,5

$$\boxed{d + r \leqslant n^2}$$

(c) On considère $(A'_1, \dots A'_d)$ une base de $\mathcal{A}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_d$, $\Psi_k : B \mapsto \text{tr}({A'_k}^T B)$.
Comme $\mathcal{A} = \text{vect}(A'_1, \dots A'_d)$, $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists\ (a_1, \dots a_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que $A = \sum\limits_{i=1}^{d} a_i A'_i$.

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{A}^\perp \quad &\Longleftrightarrow \forall\ A \in \mathcal{A},\ \text{tr}(A^\perp B) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall\ (a_1 \dots a_d) \in \mathbb{R}^d,\ 0 = \text{tr}(\sum_{i=1}^{d} {A'_i}^\perp B) = \sum_{i=1}^{d} a_i \Psi_i(B) \end{aligned}$$

Si $B \in \bigcap\limits_{i=1}^{d} \text{Ker } \Psi_k$, alors pour tout $(a_1 \dots a_d) \in \mathbb{R}^d$, $\sum\limits_{i=1}^{d} a_i \Psi_i(B) = 0$, donc $B \in \mathcal{A}^\perp$.
Réciproquement, si $B \in \mathcal{A}^\perp$, alors, pour tout $i \in \mathbb{N}_d$,
puis en prenant $a_i = 1$ et $a_j = 0$ $(j \neq i)$, alors $\Psi_i(B) = 0$, donc $B \in \text{Ker } \Psi_i$. /2

$$\boxed{\mathcal{A}^\perp = \bigcap_{i=1}^{d} \text{Ker } \Psi_k}$$

Or chaque application Ψ_k est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a donc

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{d} \text{Ker } \Psi_k\right) \geqslant n^2 - d$$

Cela donne la nouvelle inégalité : /1,5

$$\boxed{r \geqslant n^2 - d}$$

(d) Par double inégalité : $r + d = n^2$.
Et donc $\dim\left(\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp\right) = r + d = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors que $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. /1

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp \text{ et } d + r = n^2 \text{ (avec } r \neq 0).}$$

Jusqu'à la fin de cette partie III, on fixe une base $(A_1, \dots, A_r)$ de $\mathcal{A}^\perp$.

(e) Soit $N \in \mathcal{A}$. On note $N_i = N^T A_i$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{A}$, alors $\mathrm{tr}(M^T N_i) = \mathrm{tr}(M^T N^T A_i) = \mathrm{tr}((NM)^T A_i)$.

Or $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre donc stable par produit, ainsi $NM \in \mathcal{A}$.

Puis $A_i \in \mathcal{A}^\perp$. Donc $\mathrm{tr}((NM)^T A_i) = 0$. /2

$$\boxed{\text{Ainsi pour toute matrice } N \in \mathcal{A} \text{ et tout } i \in [\![1, r]\!], \text{ on a } N^T A_i \in \mathcal{A}^\perp.}$$

(f) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une inclusion est immédiate. Si $M \in \mathcal{A}$, alors comme $A_i \in \mathcal{A}^\perp$,

Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $0 = \mathrm{tr}(M^T A_i) = \mathrm{tr}((M^T A_i)^T) = \mathrm{tr}(A_i^T M)$.

Réciproquement, soit M tel que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\mathrm{tr}(A_i^T M) = 0$.

Alors par linéarité de la trace et famille génératrice $(A_k)_k$,

on a pour tout $A \in \mathcal{A}^\perp$, $\mathrm{tr}(A^T M) = 0$ i.e. $M \in \left(\mathcal{A}^\perp\right)^\perp$.

Or on a (pour les mêmes raisons que précédemment) : $E = \mathcal{A}^\perp \oplus \left(\mathcal{A}^\perp\right)^\perp = \mathcal{A}^\perp \oplus \mathcal{A}$.

Malheureusement, on ne peut pas identifier, mais on peut affirmer $\dim \left(\mathcal{A}^\perp\right)^\perp = \dim \mathcal{A}$.

Et comme pour $S \in \mathcal{A}$, $\forall\, A \in \mathcal{A}^\perp$, $0 = \mathrm{tr}(S^T A) = \mathrm{tr}((S^T A)^T) = \mathrm{tr}(A^T S)$,

on a $S \in \left(\mathcal{A}^\perp\right)^\perp$.

Ainsi, $\mathcal{A} \subset \left(\mathcal{A}^\perp\right)^\perp$. Pour des raisons de dimensions : $\mathcal{A} = \left(\mathcal{A}^\perp\right)^\perp$.

Finalement, $M \in \mathcal{A}$. /3

$$\boxed{M \text{ appartient à } \mathcal{A} \text{ si et seulement si, pour tout } i \in [\![1, r]\!], \ \mathrm{tr}(A_i^T M) = 0.}$$

2. Conclusion.

Soit $\mathcal{A}^T = \{M^T | M \in \mathcal{A}\}$.

(a) Soit $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^T, M \mapsto M^T$. $\theta(\lambda M + \lambda' M') = \lambda\theta(M) + \lambda'\theta(M')$.

Donc θ est une application linéaire et $\mathcal{A}^T$ est un sous-espace vectoriel.

Puis, $\theta \circ \theta = \mathrm{id}$, donc θ est un isomorphisme d'espace vectoriel, donc $\dim(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A}^T)$.

Par ailleurs si $M, M' \in \mathcal{A}$, $M' \times M \in \mathcal{A}$,

Donc $M^T \times M'^T = (M'M)^T \in \mathcal{A}^T$. /2

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{A}^T \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ de même dimension que } \mathcal{A}.}$$

(b) Soit $M^T \in \mathcal{A}^T$ et $\Phi_{M^T} : X \mapsto M^T X$, canoniquement associé.

Soit $i \in \mathbb{N}_r$, $\Phi_{M^T}(A_i X) = M^T A_i X$.

Or d'après 1.(e), $M^T A_i \in \mathcal{A}^\perp = \mathrm{vect}(A_1, \ldots A_r)$.

Ainsi, il existe $\lambda_1, \ldots \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $M^T A_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k A_k$.

Donc $\Phi_{M^T}(A_i X) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k A_k X \in F$. /2

$$\boxed{F \text{ est stable par les endomorphismes de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ canoniquement associés aux éléments de } \mathcal{A}^T.}$$

(c) En partie A, question 2, on a vu que si $\mathcal{A}_F$ est l'ensemble des endomorphismes qui stabilisent F, alors $\dim(\mathcal{A}_F) = n^2 - pn + p^2$, où $p = \dim F$.

L'espace des endomorphismes associés canoniquement aux éléments de $\mathcal{A}^T$ stabilise F, donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}_F$, donc sa dimension est inférieure à $n^2 - rn + r^2$ ($p = r$ ici).

Enfin, l'application $M \in \mathcal{A}^T \mapsto (X \mapsto MX)$ est un isomorphisme.

Donc la dimension de $\mathcal{A}^T$ est égale à celle de l'espace des endomorphismes canoniquement associés. /2

$$\boxed{\text{Ainsi } d = \dim(\mathcal{A}^T) \leqslant n^2 - rn + r^2 \leqslant n^2 - n + 1.}$$

Cette dernière majoration ayant été démontrée en A.2.(c)