

Devoir à la maison n°12

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'**énoncé des formules utilisées**.

Somme de Riemann

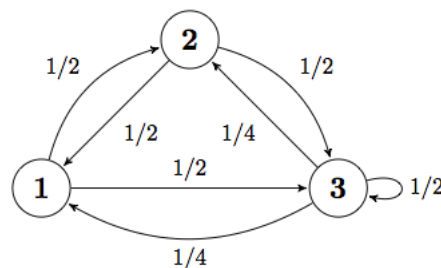
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right)$

1. Montrer que (S_n) est convergente et calculer $S = \lim(S_n)$.
2. Donner un équivalent de $(S_n - S)_n$

Problème - Marche aléatoire

On appelle « graphe » tout dessin du type de l'un des deux exemples G_1 (ci-dessous) et G_2 (en page suivante). Les sommets du graphe sont les cercles numérotés, les flèches du graphes sont les flèches reliant deux sommets. On remarquera :

- entre deux sommets distincts i et j , on peut avoir une flèche de i vers j et une de j vers i ;
- certains couples de sommets ne sont pas reliés par une flèche (par exemple 1 et 4 dans le graphe G_2);
- une flèche peut relier un sommet à lui-même;
- pour tout couple (i, j) de sommets, la flèche allant de i à j est étiquetée par un réel $s_{i,j} \in [0, 1]$, représentant une probabilité de saut;
- pour tout sommet i , la somme des probabilités étiquetant les flèches partant de i est égale à 1.



Graphe G_1

Une particule est placée à l'instant $n = 0$ sur le sommet i d'un graphe. Elle saute aléatoirement à l'instant $n = 1$ sur un autre sommet de G en suivant une des flèches partant de i , la probabilité qu'elle suive la flèche de i vers j étant égale à $s_{i,j}$. On poursuit ainsi le processus, la particule sautant à chaque instant suivant, $n = 2, 3, 4, \dots$ du sommet du graphe où elle se trouve vers un nouveau sommet (éventuellement le même) en suivant aléatoirement l'une des flèches selon les probabilités indiquées.

On suppose que les sommets du graphe G sont numérotés de 1 à m . Le processus décrit ci-dessus définit une suite $\mathcal{A} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{1, \dots, m\}$ telle que pour tout n , on a $X_n = k$ si la particule se trouve sur le sommet k du graphe G après le n^{e} saut. $\mathcal{A}$ est appelée *marche aléatoire* sur le graphe G

A. Marches aléatoires sur un graphe fini sans absorption

On étudie dans cette question quelques propriétés de la marche aléatoire sur le graphe G_1 ci-dessus.

1. On considère la marche aléatoire sur G_1 partant de $X_0 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note Y_n le vecteur

colonne $Y_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \\ \mathbf{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$. En appliquant la formule des probabilités totales au système

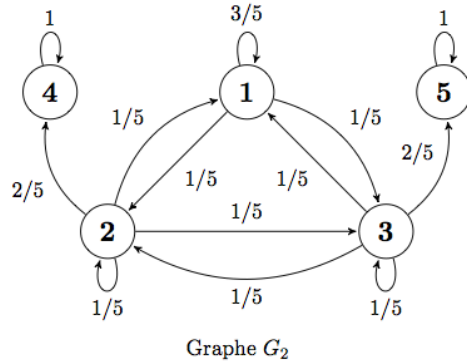
complet d'événements associés à la variable aléatoire X_n , établir une relation matricielle entre Y_{n+1} et Y_n de la forme $Y_{n+1} = AY_n$ où A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. En déduire que, pour tout n entier naturel, $Y_n = A^n Y_0$.
3. Donner, pour $n \geq 1$, $\mathbf{P}(X_n = 3)$. Justifier votre réponse.

4. (a) Calculer A^2 , puis $A^2(2A - I)$ (où I est la matrice identité d'ordre 3).
En déduire la relation $A^3 = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A$.
- (b) En déduire l'existence de deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout entier naturel n non nul : $A^n = u_n A^2 + v_n A$.
- (c) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n , puis u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n .
- (d) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_n et v_n .
5. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul la loi de X_n .

B. Marches aléatoires sur un graphe fini avec absorption

On considère maintenant une marche aléatoire $\mathcal{A}_2 = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur le graphe G_2 ci-dessous. On constate que lorsque la particule atteint le sommet 4 ou 5, elle y reste ensuite indéfiniment avec une probabilité 1 : ces deux sommets sont dit *absorbants*. On dit que la marche aléatoire est *absorbée* en 4 ou en 5 lorsqu'elle atteint le sommet correspondant.



1. On s'intéresse ici à la probabilité pour $\mathcal{A}_2$ d'être absorbée en 4 ou en 5 en fonction de son point de départ.
Pour tout couple d'entiers $(i, j) \in (\mathbb{N}_5)^2$, on note $a_{i,j}$ la probabilité que $\mathcal{A}_2$ soit absorbée en j sachant que $X_0 = i$.

- (a) Donner les valeurs des $a_{i,j}$ dans le cas particulier $\{i, j\} \in \{4, 5\}^2$.
- (b) En distinguant les cas, selon le résultat du prochain saut de la particule, montrer que $(x, y, z) = (a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,4})$ est un triplet solution du système

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z &= x \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z + \frac{2}{5} &= y \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z &= z \end{cases}$$

- (c) Résoudre le système.
Donner par un argument sur la géométrie du graphe ne nécessitant aucun calcul supplémentaire les valeurs de $(a_{1,5}, a_{2,5}, a_{3,5})$.
- (d) Montrer que la probabilité que $\mathcal{A}_2$ soit absorbée (en 4 ou en 5 indifféremment) est égale à 1, quel que soit son point de départ.
- (e) On suppose que X_0 est uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, et on constate que $\mathcal{A}_2$ est absorbée en 4. Quelle est la probabilité qu'elle soit partie du sommet 3.
2. On cherche maintenant le temps moyen d'absorption de la particule. On note T_i , la variable aléatoire qui indique le temps nécessaire pour la particule, pour aller du sommet i vers le sommet 4 ou 5. On cherche $\mathbf{E}(T_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
Ainsi, dans le cas où la particule effectue le trajet : $1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} 1 \xrightarrow{3} 3 \xrightarrow{4} 5 \xrightarrow{5} 5 \dots$, on a $T_1 = 4$.

- (a) Montrer que

$$\mathbf{P}(T_1 = 1) = 0 \quad \text{et } \forall k \geq 1 \quad \mathbf{P}(T_1 = k + 1) = \frac{3}{5}\mathbf{P}(T_1 = k) + \frac{1}{5}\mathbf{P}(T_2 = k) + \frac{1}{5}\mathbf{P}(T_3 = k)$$

- (b) En déduire $\mathbf{E}(T_1) = 1 + \frac{3}{5}\mathbf{E}(T_1) + \frac{1}{5}\mathbf{E}(T_2) + \frac{1}{5}\mathbf{E}(T_3)$
- (c) Montrer alors $(x, y, z) = (\mathbf{E}(T_1), \mathbf{E}(T_2), \mathbf{E}(T_3))$ est solution du système

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z + 1 &= x \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z + 1 &= y \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z + 1 &= z \end{cases}$$

- (d) Résoudre ce système et donner les valeurs de $\mathbf{E}(T_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.