MPSI 3 - Fermat
2020-2021

Le 04.05.21

Devoir à la maison n°11
CORRECTION

Problème - *d'après Agrégation interne 2018*

Partie I - Polynôme caractéristique, valeurs propres, diagonalisabilité

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$).

1. Polynôme caractéristique.

(a) On note pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$.
D'après la formule du déterminant, en notant $a_{i,j} =^i [A]_j$, le nombre en ligne i et colonne j de A :

$$\forall\, x \in \mathbb{K}, \qquad \chi_A(x) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{h=1}^{n} (x\delta_{\sigma(h),h} - a_{\sigma(h),h})$$

Or $(x\delta_{\sigma(h),h} - a_{\sigma(h),h})$ est un monôme en x, de degré au plus 1 (si $\sigma(h) = h$).

Donc, par produit, $\displaystyle\prod_{h=1}^{n} (x\delta_{\sigma(h),h} - a_{\sigma(h),h})$ est un polynôme en x de degré au plus n.

Et, par addition, $\displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{h=1}^{n} (x\delta_{\sigma(h),h} - a_{\sigma(h),h})$ est un polynomial de degré au plus n.

Et par ailleurs, il n'y a une et une seule façon de faire apparaître x^n,
c'est avec la permutation $\sigma = \mathrm{id}$.
Et alors, le coefficient dominant ne se simplifie pas.

$$\boxed{\text{Donc } \chi_A \text{ est bien une fonction polynomiale, de degré } n \text{ exactement.}}$$

On appelle χ_A, le polynôme caractéristique de A.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{K}$, par n-linéarité :

$$\boxed{\chi_{I_n}(x) = \det\big((x-1)I_n\big) = (x-1)^n \det(I_n) = (x-1)^n}$$

(c) Comme $\chi_A(0) = \det(0 - A) = (-1)^n \det(A)$, on a les équivalences :

$$\boxed{0 \text{ est racine de } \chi_A \Longleftrightarrow \chi_A(0) = 0 = \det(A) \Longleftrightarrow A \text{ n'est pas inversible.}}$$

(d) Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PBP^{-1}$.
Pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$xI_n - A = xPP^{-1} - PBP^{-1} = P \times (xI_n - B) \times P^{-1}$$

Donc $xI_n - A$ et $xI_n - B$ sont semblables.
Or deux matrices semblables ont même déterminant : $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.
Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{C}$, donc $\chi_A - \chi_B$ admet une infinité de racines : c'est le polynôme nul.

$$\boxed{\chi_A = \chi_B}$$

(e) Bien que $\mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$ est une matrice qui dépend de la base $\mathcal{B}$ de E considérée,
toutes ces matrices sont semblables.
Donc, pour $x \in \mathbb{K}$, toutes les matrices $xI_n - \mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$ sont semblables (pour toute base $\mathcal{B}$).
Ainsi $\det\big(xI_n - \mathcal{M}_\mathcal{B}(u)\big)$, ne dépend pas de $\mathcal{B}$, mais uniquement de u et de x.

$$\boxed{\chi_u \text{ est le polynôme égale à } \chi_{\mathcal{M}_\mathcal{B}(u)}\text{, quelle que soit la base } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ considérée.}}$$

2. Valeurs propres.
   On a la série d'équivalences :

$$\begin{aligned}\lambda \text{ valeur propre de } A &\iff \exists\ X \neq 0 \text{ tel que } AX = \lambda X \iff \exists\ X \neq 0, X \in E_\lambda(A)\\ &\iff E_\lambda(A) \neq \{0\} \iff \text{Ker } (A - \lambda I_n) \neq \{0\} \iff A - \lambda I_n \text{ non inversible}\\ &\iff \det(A - \lambda I_n) \neq 0 \iff \chi_A(\lambda) = 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda \text{ valeur propre de } A \iff E_\lambda(A) \neq \{0\} \iff \chi_A(\lambda) = 0}$$

3. Matrice diagonalisable.
   On dit que A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.
   (a) Supposons que A soit diagonalisable.
   Alors il existe $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$, semblable à A.
   Alors d'après 1.(c), $\chi_A = \chi_D$.
   Or $\chi_D = \det \begin{pmatrix} x - \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & x - \lambda_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$.

$$\boxed{\text{Donc : si } A \text{ est diagonalisable, alors } \chi_A \text{ est scindé.}}$$

   (b) Supposons que χ_A soit scindé à racines simples, notées $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \lambda_n$.
   On note pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, X_i, non nul tel que $A \times X_i = \lambda_i X_i$.

   i. Soit $(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que $\sum_{k=1}^{n} \mu_k X_k = 0$.
   En multipliant par A, on trouve (par distributivité) :

$$0 = A \times \left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k X_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k A \times X_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k X_k$$

   Posons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_p$: « $\sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k^p X_k = 0$ ».
   — On a vu que $\mathcal{P}_1$ est vraie.
   — Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_p$ est vraie.
   En multipliant par A :

$$0 = A \times \left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k^p X_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k^p A \times X_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k^{p+1} X_k$$

   Donc $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.
   Considérons alors la matrice dont les colonnes sont $(\mu_1 X_1, \mu_2 X_2, \ldots \mu_n X_n)$: $X = (\mu_1 X_1 | \mu_2 X_2 | \cdots | \mu_n X_n)$.
   On a alors

$$X \times \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i \ \middle|\ \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_i X_i \ \middle|\ \cdots \ \middle|\ \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_i^{n-1} X_i \right) = O_n$$

   Or $\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$, donc cette matrice V est inversible :

$$X = V^{-1} \times O_n = O_n$$

   Donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\mu_i X_i = 0$. Comme chaque X_i est non nul, $\mu_i = 0$.

$$\boxed{(X_1, X_2, \ldots X_n) \text{ est une famille libre.}}$$

ii. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.
On a donc, en notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n)$, la base canonique de $\mathbb{K}^n$: $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Notons alors x_i, le vecteur de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à X_i, i.e. $X_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On a alors $AX_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u(x_i)) = \lambda_i X_i = \lambda_i \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_i) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\lambda_i x_i)$.
Par ailleurs, $(X_1, \dots X_n)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,
donc $(x_1, \dots x_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$, de $n = \dim(\mathbb{K}^n)$ éléments,
donc c'est une base de $\mathbb{K}^n$, on la note $\mathcal{B}'$.

On a alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $u(x_i) = \lambda_i x_i$, donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$, diagonale.
Et ainsi, en notant $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id})$, obtenue en écrivant les coordonnées de éléments de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\boxed{A = P \times D \times P^{-1}}$$

(c) La matrice

$$\boxed{I_n \text{ est diagonalisable (déjà diagonale), et } \chi_{I_n} = (x-1)^n, \text{ scindé mais pas à racines simples.}}$$

Partie II - Premiers résultats concernant (1) et (2)

1. Pour $n = 1$, (1) devient :

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = |a|^2 + |b|^2 \in \mathbb{R}_+}$$

Elle est vraie.

2. Etude de la conjugaison dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. $A \times v$ est une matrice colonne. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$:

$${}^i[\overline{Av}] = \overline{{}^i[Av]} = \overline{\sum_{j=1}^{n} {}^i[A]_j {}^j[v]} = \sum_{j=1}^{n} \overline{{}^i[A]_j {}^j[v]} = \sum_{j=1}^{n} \overline{{}^i[A]_j}\,\overline{{}^j[v]}$$

par addition et multiplication de termes conjugués.

$${}^i[\overline{Av}] = \sum_{j=1}^{n} {}^i[\overline{A}]_j {}^j[\overline{v}] =^i [\overline{A}\overline{v}]$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et tout } v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \overline{Av} = \overline{A}\overline{v}.}$$

(b) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
Pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$:

$${}^i[\Phi(\lambda A + \mu B)]_j =^i [\overline{\lambda A + \mu B}]_j = \overline{{}^i[\lambda A + \mu B]_j} = \overline{\lambda {}^i[A]_j + \mu {}^i[B]_j} = \overline{\lambda}\,\overline{{}^i[A]_j} + \overline{\mu}\,\overline{{}^i[B]_j}$$

Puis, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$${}^i[\Phi(\lambda A + \mu B)]_j = \lambda \overline{{}^i[A]_j} + \mu \overline{{}^i[B]_j} = \lambda {}^i[\Phi(A)]_j + \mu {}^i[\Phi(B)]_j$$

De même :

$$\begin{aligned} {}^i[\Phi(A \times B)]_j &= \overline{{}^i[AB]_j} = \overline{\sum_{k=1}^{n} {}^i[A]_k {}^k[B]_j} = \sum_{k=1}^{n} \overline{{}^i[A]_k {}^k[B]_j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{{}^i[A]_k}\,\overline{{}^k[B]_j} = \sum_{k=1}^{n} {}^i[\overline{A}]_k {}^k[\overline{B}]_j =^i [\Phi(A) \times \Phi(B)]_j \end{aligned}$$

Remarques !
On peut aussi voir B comme une combinaison de colonnes de B, et exploiter la question précédente.

Enfin,

$$ {}^i[\Phi(\Phi(A))]_j = \overline{{}^i[\overline{A}]_j} = \overline{\overline{{}^i[A]_j}} = {}^i[A]_j $$

Tous ces résultats étant vrais pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$:

$$\boxed{\Phi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}\text{-algèbre involutif.}}$$

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{h=1}^{n} {}^{\sigma(h)}[\overline{A}]_h = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) \overline{\prod_{h=1}^{n} {}^{\sigma(h)}[A]_h} = \overline{\sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{h=1}^{n} {}^{\sigma(h)}[A]_h} = \overline{\det(A)}$$

$$\boxed{\text{pour tout } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}.}$$

(d) On sait aussi que la fonction det est multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\det(A\overline{A}) = \det(A)\det(\overline{A}) = \det(A) \times \overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 \in \mathbb{R}_+$$

Par ailleurs, si A est inversible ($A \in GL_n(\mathbb{C})$), $\det(A) \neq 0$, donc $|\det(A)|^2 \neq 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } A \in GL_n(\mathbb{C}),\ \det(A\overline{A}) \in \mathbb{R}_+^*.}$$

3. On suppose dans cette question que A est inversible.

(a) Il s'agit d'un calcul matriciel par blocs :

$$\boxed{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \overline{A} + \overline{B}A^{-1}B \end{bmatrix}}$$

(b) On peut calculer le déterminant de ce produit, comme nous avons des matrices par blocs triangulaires inférieure ou supérieure :

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \det\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \overline{A} + \overline{B}A^{-1}B \end{bmatrix} = \det(A)\det(\overline{A} + \overline{B}A^{-1}B)$$

Puis, comme A est inversible, il en est de même de $\overline{A}$ ($\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)} \neq 0$).
On peut factoriser à gauche par $\overline{A}$:

$$\det(A)\det(\overline{A} + \overline{B}A^{-1}B) = \det(A)\det(\overline{A})\det(I_n + \overline{A}^{-1}\overline{B}A^{-1}B) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C})$$

où $C = \overline{A}^{-1}\overline{B}$, car alors on a bien $\overline{C} = \overline{\overline{A}^{-1}\overline{B}} = A^{-1}B$

$$\boxed{\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C}), \text{ avec } C = \overline{A}^{-1}\overline{B}}$$

Remarques !

A noter qu'on aurait pu factoriser par la droite et obtenir $C = \overline{B}A^{-1}$

4. • Supposons que (1) est vraie.
Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On prend $A = I_n$ et $B = C$. Alors A est inversible, on applique le résultat de la question 4.(b) :

$$\det\left(\begin{bmatrix} I_n & C \\ \overline{C} & \overline{I_n} \end{bmatrix}\right) = |\det(I_n)|^2 \det(I_n + D\overline{D}), \text{ avec } D = \overline{I_n}^{-1}\overline{C} = C.$$

Or d'après (1), $\forall\ (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\quad \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}_+$.
Donc $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$.
• Réciproquement, supposons (2), c'est-à-dire : $\forall\ C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}_+$.
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
<u>On suppose que A est inversible.</u>
D'après 4.(b), il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C})$.
Donc si (2) est vraie, alors $|\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$, puis (1) est vraie.

<u>On suppose maintenant que A n'est pas inversible.</u>

On définit, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $A_x = A - xI_n$.

$\det(A_x) = \det(A - xI_n) = (-1)^n \det(xI_n - A) = (-1)^n \chi_A(x)$.

Soit $Z = \{x \in \mathbb{C} \mid \chi_A(x)\}$, les valeurs propres de A. Z est fini, il contient au plus n éléments.

Et donc $\forall\, x \in \mathbb{C} \setminus Z$, A_x est inversible.

On se retrouve alors dans le cas précédent et donc $\det\left(\begin{bmatrix} A_x & B \\ -\overline{B} & \overline{A_x} \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}_+$.

On considère $x \in \mathbb{R}$.

Par développement, $\det\left(\begin{bmatrix} A_x & B \\ -\overline{B} & \overline{A_x} \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} A - xI_n & B \\ -\overline{B} & \overline{A} - xI_n \end{bmatrix}\right)$

est un polynôme de la variable x, de degré au plus $2n$.

On note ce polynôme P :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus Z, P(x) = \det\left(\begin{bmatrix} A - xI_n & B \\ -\overline{B} & \overline{A} - xI_n \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}_+$$

Z est fini, donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R} \setminus Z)^{\mathbb{N}}$ tel que $(x_n) \to 0$.

P est polynomiale donc continue ; ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} P(x_n) = P(\lim(x_n)) = P(0)$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(x_n) \in \mathbb{R}_+$ (fermé), donc $P(\lim(x_n)) \in \mathbb{R}_+$.

Ainsi :

$$P(0) = \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}_+$$

$$\boxed{\text{(1) et (2) sont équivalentes.}}$$

Partie III - Démonstration de (2) dans un cas particulier

On considère $\Omega = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_{C\overline{C}}$ est un polynôme scindé à racines simples$\}$ Soit $C \in \Omega$.

1. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.

(a) $AB = A \times (BA) \times A^{-1}$.

Donc AB et BA sont semblables.

On a vu dans ce cas que les polynômes caractéristiques sont égaux :

$$\boxed{\text{si } A \text{ est inversible, } \chi_{AB} = \chi_{BA}.}$$

(b) On suppose maintenant que A n'est pas inversible (sinon, on revient au cas précédent).

Comme précédemment, on considère pour tout $x \in \mathbb{C}$, $A_x = A - xI_n$.

$\det(A_x) = \det(A - xI_n) = (-1)^n \det(xI_n - A) = (-1)^n \chi_A(x)$.

Soit $Z = \{x \in \mathbb{C} \mid \chi_A(x)\}$, les valeurs propres de A. Z contient au plus n éléments.

Et donc $\forall\, x \in \mathbb{C} \setminus Z$, A_x est inversible.

Ainsi, pour tout $x \notin Z$, $\chi_{A_x B} = \chi_{BA_x}$.

Une égalité polynomiale signifie une égalité des coefficients. Donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}_n, \forall\, x \notin Z, \qquad [\chi_{A_x B}]_k = [\chi_{BA_x}]_k$$

(où comme en cours, $[P]_k$ désigne le coefficient devant λ^k pour le polynôme $P(\lambda)$).

On fixe $k \in \mathbb{N}_n$.

$\chi_{A_x B} : \lambda \mapsto \det(\lambda I_n - (A - xI_n)B) = \det\big((\lambda I_n - AB) - xB\big)$

l'expression de $\chi_{AxB}(\lambda)$ est donc polynomiale en λ (et x).

Ainsi $[\chi_{A_x B}]_k$ et $[\chi_{BA_x}]_k$ sont des polynômes en x.

Ces deux polynômes sont identiques sur un ensemble infini, ils sont égaux.

Donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}_N, \forall\, x \in \mathbb{C}, \qquad [\chi_{A_x B}]_k = [\chi_{BA_x}]_k$$

Et en particulier pour $x = 0$:

$$\forall\, k \in \mathbb{N}_N, \qquad [\chi_{AB}]_k = [\chi_{BA}]_k \Longrightarrow \chi_{AB} = \chi_{BA}$$

$$\boxed{\text{Pour toutes matrices } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \chi_{AB} = \chi_{BA}.}$$

(c) D'après la propriété précédente, pour tout <u>$x \in \mathbb{R}$</u> :

$$\chi_{C\overline{C}}(x) = \chi_{\overline{C}C}(x) = \det(xI_n - \overline{C}C) = \det(\overline{xI_n - C\overline{C}}) = \overline{\det(xI_n - C\overline{C})} = \overline{\chi_{C\overline{C}}(x)}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\chi_{C\overline{C}}(x) \in \mathbb{R}$.

Supposons maintenant que $\chi_{C\overline{C}} = P + iQ$ avec $P, Q \in \mathbb{R}[X]$

(on décompose chaque coefficient de $\chi_{C\overline{C}}$ en somme d'un réel et d'un imaginaire pur).
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \chi_{C\overline{C}}(x)$ et $Q(x) = 0$.
Comme $\mathbb{R}$ est infini : il y a égalité des polynômes : $\chi_{C\overline{C}} = P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q = 0$.

$$\boxed{\chi_{C\overline{C}} \in \mathbb{R}[X]}$$

2. Comme $C \in \Omega$, on exploite la conclusion de la première partie :

$$\boxed{C\overline{C} \text{ est diagonalisabe et on a vu que chaque sous-espaces propres est de dimension 1}}$$

3. Soit λ une valeur propre *réelle* de $C\overline{C}$ et $V \in \mathbb{C}^n$, un vecteur propre associée.

$$V \in E_\lambda(C\overline{C}) \quad \text{et} \quad V \neq 0$$

(a) Par hypothèse, $C\overline{C} \times V = \lambda V$. On conjugue la relation :

$$\boxed{\overline{C}C \times \overline{V} = \lambda\overline{V}}$$

car $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Puis :

$$C\overline{C} \times (C\overline{V}) = C \times \overline{C}C \times \overline{V} = C \times (\lambda\overline{V}) = \lambda \cdot C\overline{V}$$

$$\boxed{\text{Donc } C\overline{V} \in E_\lambda(C\overline{C}).}$$

Or, on a vu que l'espace propre $E_\lambda(C\overline{C})$ est de dimension 1 :

$$E_\lambda(C\overline{C}) = \text{vect}(V)$$

$$\boxed{\text{Donc il existe } \mu \in \mathbb{C} \text{ tel que } C\overline{V} = \mu V.}$$

(c) En conjuguant la relation précédente : $\overline{C}V = \overline{\mu}\overline{V}$.
En multipliant par C : $\lambda V = C\overline{C}V = \overline{\mu}C\overline{V} = \overline{\mu}\mu V$.
Donc $(\lambda - |\mu|^2)V = 0$. Or V est un vecteur non nul, donc nécessairement : $\lambda - |\mu|^2 = 0$

$$\boxed{\lambda = |\mu|^2 \in \mathbb{R}_+}$$

4. Puisque $C \in \Omega$, χ_C est scindé à racines simples, et nécessairement unitaire

$$\forall\, x \in \mathbb{C}, \qquad \det(xI_n - C\overline{C}) = \chi_{C\overline{C}}(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)$$

Parmi les valeurs propres λ, certaines sont réelles, elles sont alors positives,
et d'autres sont complexes, dans ce cas comme $\chi_{C\overline{C}} \in \mathbb{R}[X]$,
leur conjugué est aussi une racine de $\chi_{C\overline{C}}$.
On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\chi_{C\overline{C}}(x) &= \prod_{i\in\mathbb{N}_n \;|\; \lambda_i\in\mathbb{R}_+}(x-\lambda_i) \times \prod_{i\in\mathbb{N}_n \;|\; \mathrm{Im}(\lambda_i)>0}(x-\lambda_i)(x-\overline{\lambda_i}) \\ &= (-1)^n \prod_{i\in\mathbb{N}_n \;|\; \lambda_i\in\mathbb{R}_+}(\lambda_i - x) \times \prod_{i\in\mathbb{N}_n \;|\; \mathrm{Im}(\lambda_i)>0}(|\lambda_i|^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda_i)x + x^2)\end{aligned}$$

On a alors

$$\det(I_n+C\overline{C}) = \det\big(-(-1I_n - C\overline{C})\big) = (-1)^n\chi_{C\overline{C}}(-1) = \prod_{i\in\mathbb{N}_n \;|\; \lambda_i\in\mathbb{R}_+}(\lambda_i+1)\times\prod_{i\in\mathbb{N}_n \;|\; \mathrm{Im}(\lambda_i)>0}(|\lambda_i|^2+2\mathrm{Re}(\lambda_i)+1)$$

Or $1 + \lambda_i > 0$, pour $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$,
et, par construction, le discriminant de $|\lambda_i|^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda_i)x + x^2$ est strictement négatif,
donc $|\lambda_i|^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda_i)x + x^2 \geqslant 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc pour $x = -1$, en particulier.

$$\boxed{\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+}$$

Partie IV - Résultants de deux polynômes

Soit $(q,r) \in (\mathbb{N}^*)^2$, un couple d'entiers naturels non nuls.

Soient $P = \sum_{k=0}^{q} a_k X^k \in \mathbb{K}_q[X]$ de degré q et $Q = \sum_{h=0}^{r} b_h X^h \in \mathbb{K}_r[X]$, un polynôme de degré r.

On considère enfin l'application $\left\{ \begin{array}{llll} \Psi : & \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ & (U,V) & \longmapsto & PU+QV \end{array} \right.$.

1. En tant que produit cartésien, $\dim\left(\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]\right) = \dim \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \dim \mathbb{K}_{q-1}[X] = r+q$. $\mathcal{B}$ est constitué de $r+q$ éléments. Il suffit donc de montrer que cette famille est libre ou bien génératrice de $\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.
   Soient $(U,V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$, alors $U \in \mathbb{K}_{r-1}[X]$ et $V \in \mathbb{K}_{q-1}[X]$.
   $\exists\ (c_0, c_1, \dots c_{r-1}) \in \mathbb{K}^r$ et $(d_0, d_1, \dots d_{q-1}) \in \mathbb{K}^q$ tels que $U = \sum_{i=0}^{r-1} c_i X^i$ et $V = \sum_{j=0}^{q-1} d_j X^j$.
   $$(U,V) = \left(\sum_{i=0}^{r-1} c_i X^i, \sum_{j=0}^{q-1} d_j X^i \right) = \sum_{i=0}^{r-1} c_i (X^i, 0) + \sum_{j=0}^{q-1} d_j (0, X^j)$$
   Ainsi, $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.
   $$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X].}$$

2. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, (U_1, V_1), $(U_2, V_2) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.
   $$\begin{aligned} \Psi\big(\lambda_1 (U_1, V_1) + \lambda_2 (U_2, V_2)\big) &= \Psi\big((\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2, \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2)\big) = P(\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2) + Q(\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2) \\ &= \lambda_1 (PU_1 + QV_1) + \lambda_2 (PU_2 + QV_2) = \lambda_1 \Psi(U_1, V_1) + \lambda_2 \Psi(U_2, V_2) \end{aligned}$$
   $$\boxed{\Psi \text{ est bien une application linéaire.}}$$

3. Pour $i \in \{0, 1, \dots r-1\}$ (on étudie la colonne $i+1$ de M),
   $$\Psi(X^i, 0) = PX^i = \sum_{k=0}^{q} a_k X^{k+i} = \sum_{h=0}^{i-1} 0X^h + \sum_{h=i}^{q+i} a_{h-i} X^h + \sum_{h=q+i+1}^{q+r-1} 0X^h.$$
   On retrouve en colonne $i+1$ (avec $i \leqslant r-1$) de M, exactement la colonne $i+1$ de $\mathrm{Syl}(P,Q)$.
   Pour $j \in \{0, 1, \dots q-1\}$ (on étudie la colonne $r+j+1$ de M),
   $$\Psi(0, X^j) = QX^j = \sum_{k=0}^{r} b_k X^{k+j} = \sum_{h=0}^{j-1} 0X^h + \sum_{h=j}^{r+j} b_{h-j} X^h + \sum_{h=r+j+1}^{q+r-1} 0X^h.$$
   On retrouve en colonne $j+r+1$(avec $j \leqslant q-1$) de M, exactement la colonne $j+r+1$ de $\mathrm{Syl}(P,Q)$.
   $$\boxed{M = \mathrm{Syl}(P,Q)}$$

4. On suppose que $P \wedge Q = 1$.
   (a) Soient $(U,V) \in \mathrm{Ker}\ \Psi$, donc $\Psi(U,V) = PU + QV = 0$ Donc $UP = -QV$ et donc $P|QV$. Or $P \wedge Q = 1$, donc $P|V$ d'après le lemme de Gauss.
   Or $\deg V \leqslant q-1 < q = \deg P$. Donc $V = 0$, nécessairement.
   Et de même $Q|PU$, donc $Q|U$, donc pour des raisons de degré $U = 0$.
   Ainsi $\mathrm{Ker}\ \Psi = (0,0)$ (l'inclusion réciproque est triviale).
   $$\boxed{\Psi \text{ est injective.}}$$
   (b) Comme $\dim(\mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{r-1}[X]) = q+r = \dim(\mathbb{K}_{q+r-1}[X])$, alors Ψ est également bijective.
   On a alors $\det \Psi \neq 0$.
   Or $\det \Psi = \det\big(\mathrm{Syl}(P,Q)\big) = \mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q)$.
   $$\boxed{\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) \neq 0}$$

5. On suppose que $P \wedge Q \neq 1$.
   On raisonne par contraposée. Supposons que Ψ est surjective.
   Alors $1 \in \mathbb{K}_{q+r-1}[X]$ possède un antécédent par Ψ.
   Il existe $(U,V) \in \mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{r-1}[X]$ tel que $\Psi(U,V) = 1$.
   Donc $PU + QV = 1$. Et d'après le théorème de Bézout, $P \wedge Q = 1$.
   Par contraposée :
   $$\boxed{\text{Si } P \wedge Q \neq 1 \text{ alors } \Psi \text{ n'est pas surjective, et donc } \mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) = \det \Psi = 0.}$$

6. On a alors $P'=2aX+b$, $q=2$, $r=1$,

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,P')=\det\begin{pmatrix} c & b & 0\\ b & 2a & b\\ a & 0 & 2a\end{pmatrix}=4a^2c+b^2a-2ab^2=a(4ac-b^2)$$

On a alors

$$\boxed{\Delta(P)=\frac{(-1)^{\frac{2\times 1}{2}}}{a}\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,P')=b^2-4ac}$$

7. Si P est scindé à racines simples,
   alors P n'admettant pas de racines multiples, P et P' n'ont aucune racine commune.
   Soit $D=P\wedge P'$. $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, donc si $\deg D>1$, D admet une racine z.
   Donc z est racine de P et P'. C'est impossible, donc $\deg D\leqslant 1$.
   Donc $P\wedge P'=1$. Et par conséquent $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}}(P,P')\neq 0$.
   Ainsi, $\Delta(P)=\underbrace{\frac{(-1)^{q(q-1)/2}}{a_q}}_{\neq 0}\mathrm{Res}_{\mathbb{C}}(P,P')\neq 0$.
   Réciproquement, supposons que P admet une racine double z_0.
   Alors $(X-z_0)|P$ et $(X-z_0)|P'$, donc $(X-z_0)|(P\wedge P')$.
   Donc $P\wedge P'\neq 1$ et donc $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}}(P,P')=0$.
   Et ainsi $\Delta(P)=\dfrac{(-1)^{q(q-1)/2}}{a_q}\mathrm{Res}_{\mathbb{C}}(P,P')=0$

   $$\boxed{\text{Si } \mathbb{K}=\mathbb{C},\ P \text{ est un polynôme scindé à racines simples si et seulement si } \Delta(P)\neq 0.}$$

Remarques !
Dans le cas $n=2$, on sait bien que le discriminant nul indique que P admet une racine double.
Nous avons ainsi une nouvelle façon de voir si un polynôme admet une racine multiple.
Il n'est pas impossible que cela donne aussi une clé pour la factorisation de P...

Partie V - Fonctions polynomiales à plusieurs variables

Soit d un entier naturel non nul.
On dit qu'une fonction $P:\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}$ est polynomiale lorsqu'il existe une partie finie S de $\mathbb{N}^d$ et une famille $(a_k)_{k\in S}$ de nombres complexes telles que

$$\forall\ (x_1,x_2,\dots x_d)\in\mathbb{C}^d,\qquad P(x_1,\dots x_d)=\sum_{(k_1,k_2,\dots k_d)\in S}a_{(k_1,k_2,\dots k_d)}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_d^{k_d}$$

Soit P une fonction polynomiale.
En reprenant les notations précédentes, on pose $Z_P=\{(x_k)_{1\leqslant k\leqslant d}\in\mathbb{C}^d\mid P(x_1,x_2,\dots x_d)=0\}$.

1. Nous allons raisonner par récurrence sur d comme cela est proposé ici.
   Posons, pour tout $d\in\mathbb{N}^*$,

   $$\mathcal{P}_d : \ll \text{Pour tout } P:\mathbb{C}^d\to\mathbb{C} \text{ polynôme, si il existe } I_1,I_2,\dots I_d \text{ parties infinies de } \mathbb{C}, \text{ tel que } I_1\times I_2\times\cdots\times I_d\subset Z_P,\quad \text{alors } P=0\gg$$

   — $\mathcal{P}_1$ est vraie : si un polynôme (d'une variable) admet un nombre infini de racines, alors il est nul.
   (*Démonstration : si $P(z)=0$, alors $(X-z)|P$, et donc $\deg P\geqslant \mathrm{card}\big(Z(P)\big)\dots$*)
   — Soit $d\in\mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_d$ est vraie.
   La stratégie est la suivante : on fixe $d-1$ une variables, qui intègrent les constantes. Puis on applique la proposition précédente. Et enfin $\mathcal{P}_d$.
   Soit $P:\mathbb{C}^{d-1}\to\mathbb{C}$ un polynôme, il existe une partie finie S_{d+1} de $\mathbb{N}^{d+1}$ et une famille $(a_k)_{k\in S_{d+1}}$ de nombres complexes telles que

   $$\forall\ (x_1,x_2,\dots x_d,x_{d+1})\in\mathbb{C}^{d+1}, P(x_1,\dots x_n,x_{d+1})=\sum_{(k_1,k_2,\dots k_d,k_{d+1})\in S_{d+1}}a_{(k_1,k_2,\dots k_d,k_{d+1})}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_d^{k_d}x_{d+1}^{k_{d+1}}$$

On peut alors ranger ces nombres en fonction de la valeur prise par k_{d+1}.
S_{d+1} est finie, donc $K_{d+1} = \max\{k_{d+1}, \exists\ (k_1, \dots k_d) \in \mathbb{N}^d \mid (k_1, \dots k_d, k_{d+1}) \in S_{d+1}\}$ existe.

$$\forall\ (x_1, x_2, \dots x_d, x_{d+1}) \in \mathbb{C}^{d+1},$$
$$P(x_1, \dots x_n, x_{d+1}) = \sum_{k=0}^{K_{d+1}} \underbrace{\left[\sum_{(k_1,\dots k_d)\ \mid\ (k_1,k_2,\dots k_d,k)\in S_{d+1}} a_{(k_1,k_2,\dots k_d,k)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_d^{k_d} \right]}_{=A_k^{x_1,\dots x_d}} x_{d+1}^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{K_{d+1}} A_k x_{d+1}^k}_{=Q^{x_1,\dots x_d}(x_{d+1})}$$

où A_k est un coefficient constant, vu de x_{d+1}, mais est en fait un polynôme en les d variables $(x_1, x_2, \dots x_d)$.
On suppose qu'il existe $I_1, \dots I_d, I_{d+1}$ parties infinies de $\mathbb{C}$, tel que $I_1 \times \cdots \times I_d \times I_{d+1} \subset Z_P$.
Soit $(x_1, x_2, \dots x_d) \in I_1 \times I_2 \times \dots I_d$, fixé.
alors pour tout $x_{d+1} \in I_{d+1}$, $Q^{x_1,\dots x_d}(x_{d+1}) = 0$.
Donc $Q^{x_1,\dots x_d}$ admet une infinité de racines. C'est le polynôme nul.
Ainsi, $\forall\ k \in \mathbb{N}_{K_{d+1}}$, $A_k^{x_1,\dots x_d} = 0$.
On peut alors appliquer $\mathcal{P}_d$ à tous les polynômes $A_k^{x_1,\dots x_d}$, nul pour $(x_1, x_2, \dots x_d) \in I_1 \times I_2 \times \dots I_d$.
Donc P est identiquement nul et $\mathcal{P}_{d+1}$ et ainsi démontrée.

$$\boxed{\text{Si } I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d \subset Z_P, \text{ où } I_k \text{ est infini, alors } P \text{ est la fonction polynomiale nulle.}}$$

2. $C \in \Omega \iff \chi_{C\overline{C}}$ est un polynôme scindé à racines simples $\iff \Delta(\chi_{C\overline{C}}) \neq 0$.
On note, pour $k \in \{0, 1, \dots n\}$, $P_k : (x, x_1, \dots x_{n^2}) \mapsto [\chi_{X\overline{X}}]_k$ où $\forall\ i, j \in \mathbb{N}_n$, ${}^i[X]_j = x_{n(i-1)+j}$.
Il s'agit bien d'une application polynomiale : par produit et addition matriciels, puis composition avec la fonction polynomiale det et enfin extraction de la k^{e}composante.
Puis, on note, $\Delta'(a_0, a_1, \dots a_n) \mapsto a_n \times \Delta(P, P')$ où $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
C'est encore une fonction polynomiale, car la fonction $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}}$ est un déterminant.
Enfin, par composition, avec $R = \Delta' \circ (P_0, P_1, \dots P_n) \circ \left(({}^i[C]_j)\right)$, polynomiale :

$$\boxed{\text{Il existe une fonction polynomiale } R : \mathbb{C}^{n^2} \to \mathbb{C} \text{ non nulle, telle que : } C \in \Omega \iff R(C) \neq 0.}$$

R est non nulle, puisque Ω est non vide.

3. Soit $C \notin \Omega$ et $p \in \mathbb{N}$,
On note, pour tout $(h_1, \dots h_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2}$, $C_{h_1,\dots h_{n^2}} = C + \sum_{i,j} h_{n(i-1)+j} E_{i,j}$.
Si pour pour tout $(h_1, \dots h_{n^2}) \in (]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}[)^{n^2}$, $C_{h_1,\dots h_{n^2}} \notin \Omega$, Alors $R(C_{h_1,\dots h_{n^2}}) = 0$.
Donc R s'annule sur le produit cartésien $\otimes_{i,j\in\mathbb{N}_n} \left]{}^i[C]_j - \frac{1}{p}, {}^i[C]_j - \frac{1}{p}\right[$.
Et donc d'après la question 1., R est le polynôme identiquement nul. Ce qui est absurde.
Donc, il existe $(h_1, \dots h_{n^2}) \in (]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}[)^{n^2}$ tel que $C_{h_1,\dots h_{n^2}} \in \Omega$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ il existe donc } C_p \in \Omega \text{ tel que } \forall\ i, j \in \mathbb{N}_n, \left|{}^i[C_p - C]_j\right| < \tfrac{1}{p}}$$

4. En partie III, on a montré que pour $C \in \Omega$, (2) est toujours vrai.
On suppose C quelconque.
On peut considèrer une suite $(C_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim({}^i[C_p]_j) ={}^i [C]_j$, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$.
On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C_k \in \Omega$, donc $\det(I_n + C_k\overline{C_k}) \in \mathbb{R}_+$.
Puis, det est polynomial en les coefficients donc il existe un polynôme P à n^2 variable tel que

$$\det(I_n + M\overline{M}) = P({}^1[M]_1, {}^1[M]_2, \dots {}^n[M]_{n-1}, {}^n[M]_n)$$

Donc par continuité :

$$\det(I_n + C_k\overline{C_k}) = \underbrace{P({}^1[C_k]_1, \dots {}^n[C_k]_n)}_{\in\mathbb{R}_+} \to P(\lim_k{}^1[C_k]_1, \dots \lim_k{}^n[C_k]_n) = P({}^1[C]_1, \dots, {}^n[C]_n) = \det(I_n + C\overline{C})$$

Donc comme la limite d'un nombre positif est positif :

$$\boxed{\text{Pour tout } C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+ \text{ (assertion (2)).}}$$

5. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
Considérons $\tilde{C} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} C$, alors $\overline{\tilde{C}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \overline{C}$, car $\lambda \geqslant 0$.
On a alors

$$\det(\lambda I_n + C\overline{C}) = \lambda^n \det(I_n + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} C \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \overline{C}) = \lambda^n \det(I_n + \tilde{C}\overline{\tilde{C}}) \in \mathbb{R}_+$$

d'après la question précédente. Donc :

$$\boxed{\text{pour tout } C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \text{ on a : } \forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \det(\lambda I_n + C\overline{C}) \geqslant 0}$$

(b) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = A^2 = A\overline{A}$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$:

$$\chi_M(-\lambda) = \det(-\lambda I_n - M) = (-1)^n \det(\lambda I_n + A\overline{A})$$

D'après la question précédente, $x \mapsto \chi_M(x)$ est de signe constant (celui de $(-1)^n$) sur $\mathbb{R}_-$.
Donc, si μ est une racine négative du polynôme χ_M (i.e. μ valeur propre réelle strictement négative de M), elle est d'ordre pair (sinon, $\chi_M(\mu^+) \times \chi_M(\mu-) < 0$).

$$\boxed{\text{si } M = A^2 \text{ avec } A \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ alors les v.p. réelles strictement négatives de } M \text{ sont de multiplicité paire.}}$$