

Devoir à la maison n°10 CORRECTION

Exercice

Soit $n \geq 1$ et $p \geq 0$ des entiers. On note F_n^p l'ensemble des parties de $\mathbb{N}_n$ à p éléments ne contenant aucune paire d'entiers consécutifs. On note K_n^p le cardinal de F_n^p .

1. Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_p\} \in F_n^p$, on suppose que $a_k < a_{k+1}$.

Comme F_n^p ne contient aucune paire d'entiers consécutifs : $\forall k \in \mathbb{N}_{p-1}, a_k + 1 < a_{k+1}$ ou $a_k + 2 \leq a_{k+1}$.

On a donc (télescopage)

$$n - 1 \leq a_p - a_1 = \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) \geq \sum_{k=1}^{p-1} 2 = 2(p-1) = 2p - 2$$

Ainsi, nécessairement $n + 1 \leq 2p$.

La contraposée indique donc

Si $p > \frac{n+1}{2}$, $F_n^p = \emptyset$ et $K_n^p = 0$.

2. On applique le même raisonnement qu'à la question précédente :

$$b_{k+1} - b_k = a_{k+1} + 1 - (k+1) - a_k - 1 + k = a_{k+1} - a_k - 1 \leq 2 - 1 = 1$$

Et par ailleurs : $b_1 = a_1 + 1 - 1 = a_1 \leq 1$ et $b_p = a_p + 1 - p \leq n + 1 - p$

$1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_p \leq n + 1 - p$

3. On exploite fonction précédente, il s'agit de passer de $\{a_k\}$ à $\{b_k\}$.

Les éléments de F_n^p comme ceux de G_N^p sont des ensembles de p éléments,

on peut naturellement les considérer comme des p -liste ordonnée. Soit $\Psi : F_n^p \rightarrow G_n^p$,

$(a_1 < a_2 < \dots < a_p) \mapsto (a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2, \dots < a_p + 1 - p)$.

D'après la question précédente, Ψ est bien à valeurs dans G_n^p .

Et Ψ est bijective, avec $\Psi^{-1} : (b_1 < b_2, \dots < b_p) \mapsto (b_1, b_2 + 1, b_3 + 2, \dots, b_p + p - 1)$.

4. On a donc, par exploitation de la bijection :

$$K_n^p = \text{Card}(F_n^p) = \text{Card}(G_n^p) = \text{Card}\left(\mathbb{N}_{n+1-p} \atop p\right) = \binom{n+1-p}{p}$$

(On vérifie que ce calcul a un sens car $p \leq n + 1 - p \iff p \leq \frac{n+1}{2}$).

5. Application : on a $p = 6$ et $n = 49$.

Il y a $\binom{44}{6} = \frac{44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40 \times 39}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7\,059\,052$ tirages au loto sans paire d'entiers consécutifs.

Problème

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $W = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. (a) Le calcul donne

$$A^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 1 - c^2 - b^2 & ab & ac \\ ab & 1 - c^2 - a^2 & bc \\ ac & bc & 1 - a^2 - b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

car $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

(b) D'après le calcul précédent, on trouve $A^2 + I_3 = W \times W^T$ Donc pour tout $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$A^2 X + X = (A^2 + I_3)X = (WW^T)X = W(W^T X) = (W^T X)W$$

car $W^T X$ est un nombre (matrice de taille 1×1).

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe $\alpha (= W^T X) \in \mathbb{R}$ tel que $A^2 X = \alpha W - X$.

(c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 X \in \text{Ker } A &\iff AX = 0 \iff \begin{pmatrix} -cy + bz \\ cx - az \\ -bx + ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -cy + bz = 0 \\ cx - az = 0 \\ -bx + ay = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} cx - az = 0 \\ -cy + bz = 0 \\ -bx + ay = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_1 \leftarrow L_2 \end{array} \right. \iff \begin{cases} cx - az = 0 \\ -cy + bz = 0 \\ acy - abz = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} L_3 \leftarrow cL_3 + bL_1 \end{array} \right. \\
 &\iff \begin{cases} cx - az = 0 \\ -cy + bz = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + aL_2 \end{array} \right. \iff \begin{cases} x = \frac{a}{c}z \\ y = \frac{b}{c}z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = \frac{a}{c}z \\ y = \frac{b}{c}z \end{cases} \iff X = \frac{z}{c}W \quad \text{si } c \neq 0
 \end{aligned}$$

Donc si $c \neq 0$, $\text{Ker } A = \text{vect}(W)$.

Et par ailleurs, si $c = 0$ (On notera que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, donc $(a, b) \neq (0, 0)$) :

$$X \in \text{Ker } A \iff \begin{cases} -cy + bz = 0 \\ cx - az = 0 \\ -bx + ay = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ bx = ay \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ bx = ay \end{cases} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } X = \lambda W \quad \text{si } c = 0$$

Donc dans tous les cas ; puis avec le théorème du rang :

$\text{Ker } A = \text{vect}W \quad \text{et} \quad \text{rg}(A) = 2$

2. Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(a) Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda W + \mu X + \nu AX = 0$.

Comme $W \in \text{Ker } A$, en multipliant par A :

$$0 = A \times 0 = \lambda AW + \mu AX + \nu A^2 X = \mu AX + \alpha \nu W - \nu X$$

Et encore une fois :

$$0 = \mu A^2 X - \nu AX = \alpha \mu W - \mu X - \nu AX$$

En additionnant la première et la troisième somme, on a : $(\lambda + \alpha \mu)W = 0$.

Et comme $W \neq 0$, nécessairement : $\lambda = -\alpha \mu$.

On alors pour première somme, multiplié par ν : $-\alpha \mu \nu W + \mu \nu X + \nu^2 AX = 0$

alors qu'en multipliant la seconde par μ : $\alpha \mu \nu W - \mu \nu X + \mu^2 AX = 0$.

L'addition donne : $(\mu^2 + \nu^2)AX = 0$.

• Si $AX \neq 0 \iff X \notin \text{Ker } A$:

$\mu^2 + \nu^2 = 0$, donc $\mu = \nu = 0$ ($\mu, \nu \in \mathbb{R}$)

Et donc $\lambda = -\alpha \mu = 0$.

Donc (W, X, AX) famille libre (de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$). Comme $\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3 = \text{card}(W, X, AX)$.

Alors (W, X, AX) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

• Si $AX = 0 \iff X \in \text{Ker } A$, alors (W, X, AX) n'est pas libre (un vecteur nul).

Alors (W, X, AX) n'est pas une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On a donc

$(W, X, AX) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } X \notin \text{Ker } A.$

(b) On suppose que $X \notin \text{Ker } A$. On a donc en blocs : $P = (W|X|AX)$

$AP = (AW|AX|A^2 X) = (0|0W + 0X + 1AX|\alpha W - X)$

(c) Soit $T' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors (par blocs) :

$$P \times T' = (W|X|AX) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0|AX|W-X) = AP$$

Avec $T' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $AP = P \times T'$.

3. On considère $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Soit $\mathcal{B} = (x, y, z)$ une base de E .

A tout $a \in E$ (écrit en minuscule), on associe A (majuscule), la matrice de ses coordonnées dans la base canonique.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = T \iff u(x) = 0, u(y) = z, u(z) = -y$$

Donc $x \in \text{Ker } u$, donc nécessairement x colinéaire à W .

Puis $u^2(y) = \alpha w - y$, donc $\alpha = 0$ i.e. $W^T \times Y = 0$.

Réciproquement :

Supposons $x \in \text{Ker } u$, i.e. $x = \lambda w$, $y \in \{h \mid W^T \times H = 0\}$ et $z = u(y)$, alors (x, y, z) vérifie $\mathcal{M}_{(x,y,z)}(u) = T$ et (x, y, z) une base.

L'ensemble X des bases tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = T$ est $\{(\lambda w, y, u(y)) \text{ avec } W^T Y = 0.\}$

(b) On note $\psi_w : y \mapsto W^T Y$. Il s'agit d'une forme linéaire.

Son noyau est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, donc de dimension 2.

D'après l'écriture de la matrice de u dans les bases $\mathcal{B} = (x, y, z)$ de X ,

on a $z = u(y)$ et $(y, z) \in \text{Ker } \psi_w$.

Or (y, z) est libre et $\dim \text{Ker } \psi_w = 2$, il s'agit donc d'une base de $\text{Ker } \psi_w$.

Donc si (x, y, z) et (x', y', z') sont deux bases de $\mathbb{R}^3$, prises dans X :

- Il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $x' = \lambda x$ (sinon $x' = 0$)
- Il existe μ, ν tel que $y' = \mu y + \nu z$ et $(\mu, \nu) \neq (0, 0) \iff \mu^2 + \nu^2 \neq 0$ (sinon $y' = 0$).
et donc $z' = u(y') = \mu u(y) + \nu u(z) = \mu z - \nu y$ car $u(z) = u^2(y) = -y$.

Ainsi nécessairement $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -\nu \\ 0 & \nu & \mu \end{pmatrix}$.

Et réciproquement, si $\mathcal{B}$ est une base de X ,

Et si $\mathcal{B}'$ est telle que $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -\nu \\ 0 & \nu & \mu \end{pmatrix}$, avec $\lambda \neq 0$ et $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$

Alors $u(x') = u(\lambda x) = \lambda u(x) = 0$

$u(y') = u(\mu y + \nu z) = \mu u(y) + \nu u(z) = \mu z - \nu y = z'$

$u(z') = u(-\nu y + \mu z) = -(\nu z + \mu y) = -y'$.

Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = T$.

$\{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}; (\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in X^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -\nu \\ 0 & \nu & \mu \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}^*, \mu, \nu \in \mathbb{R} \text{ et } \mu^2 + \nu^2 \neq 0 \right\}$

où $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

(c) • Avec $\lambda = \mu = 1$ et $\nu = 0$, on a $I_3 \in \mathcal{P}$, non vide donc.

• Si $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -\nu \\ 0 & \nu & \mu \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} \lambda' & 0 & 0 \\ 0 & \mu' & -\nu' \\ 0 & \nu' & \mu' \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$

$$AA' = \begin{pmatrix} \lambda\lambda' & 0 & 0 \\ 0 & \mu\mu' - \nu\nu' & -\mu\nu' - \nu\mu' \\ 0 & \mu\nu' + \nu\mu' & \mu\mu' - \nu\nu' \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$$

car $\lambda\lambda' \neq 0$ et $(\mu\mu' - \nu\nu')^2 + (\mu\nu' + \nu\mu')^2 = \dots = (\mu^2 + \nu^2)(\mu'^2 + \nu'^2) \neq 0$.

- Si $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -\nu \\ 0 & \nu & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$, alors $\lambda \neq 0$ et $\mu^2 + \nu^2 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -\nu \\ 0 & \nu & \mu \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\mu^2 + \nu^2} & \frac{\nu}{\mu^2 + \nu^2} \\ 0 & \frac{-\nu}{\mu^2 + \nu^2} & \frac{\mu}{\mu^2 + \nu^2} \end{pmatrix} = I_3$$

Donc $A^{-1} \in \mathcal{P}$

$\mathcal{P}$ est un sous-groupe du groupe $(GL_3(\mathbb{R}), \times)$.