Devoir surveillé n°8

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice - Vecteur type d'une permutation

On note $\mathfrak{S}_n$, l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n$. $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe.

A chaque permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on associe, pour tout entier $i \leqslant n$,
$\lambda_i(\sigma)$, le nombre de cycle de longueur i dans la décomposition de σ en produit de cycles.

Le vecteur $\Lambda(\sigma) = (\lambda_1(\sigma), \dots \lambda_n(\sigma))$ est appelé le vecteur-type de σ.

1. Donner le vecteur-type des permutations

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 9 & 2 & 6 & 7 & 10 & 1 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 13 & 4 & 9 & 11 & 2 & 6 & 7 & 12 & 10 & 1 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Que vaut $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\sigma)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\lambda_i(\sigma)$?
3. Donner (en expliquant) une formule qui donne la valeur de $\epsilon(\sigma)$ en fonction de $\Lambda(\sigma)$.
4. Montrer que le nombre de permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ de vecteur-type $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ est

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} \left(i^{\lambda_i}(\lambda_i!)\right)} \qquad \text{(Formule de Cauchy)}$$

5. Combien existe-t-il de permutations de $\mathfrak{S}_{10}$ d'ordre 3 ?

T.S.V.P.

Problème - Réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On note $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On note $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice, dans la base $\mathcal{B}$ de E, de l'endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(E)$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable pour la composition, c'est-à-dire que $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ quels que soient les éléments u et v de $\mathcal{A}$. (Remarquer qu'on ne demande pas que id_E appartienne à $\mathcal{A}$).
On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est *commutative* si pour tous u et v dans $\mathcal{A}$, $u \circ v = v \circ u$.
Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dite *diagonalisable* s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale pour tout u de $\mathcal{A}$.

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel.
Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{A}$, $AB = BA$.
Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de $\mathcal{A}$, $P^{-1}MP$ soit diagonale.

Si $\mathcal{B}$ est une base de E, l'application $Mat_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une bijection qui envoie une sous-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable) de $\mathcal{L}(E)$ sur une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement commutative, diagonalisable).

Un sous-espace vectoriel F de E est *strict* si F est différent de E.

On désigne par $S_n(\mathbb{K})$ (respectivement $A_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $T_n(\mathbb{K})$ (respectivement $T_n^+(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

A. Exemples de sous-algèbres

1. Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
   (a) Les sous-ensembles $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
   (b) Les sous-ensembles $S_2(\mathbb{K})$ et $A_2(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?
   (c) On suppose $n \geqslant 3$. Les sous-ensembles $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
2. Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$.
   Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{A}_F$ l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F, c'est-à-dire $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
   (b) Montrer que $\dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2$.
   On pourra considérer une base de E dans laquelle la matrice de tout élément de $\mathcal{A}_F$ est triangulaire par blocs.
   (c) Déterminer $\max_{1 \leqslant p \leqslant n-1}(n^2 - pn + p^2)$.
3. Exemples de sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisable
   Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ($(a, b) \in \mathbb{K}^2$).
   (a) Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   (b) On note $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (où $i^2 = -1$) et $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer P^{-1}, puis $P^{-1}MP$.
   (c) En déduire que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

B. Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose $n \geqslant 2$.

Pour tout $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$J(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le coefficient d'indice(i,j) de $J(a_0,\dots,a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geq j$ et a_{i-j+n} si $i < j$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $J(a_0,\dots,a_{n-1})$ où $(a_0,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1,\dots n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1,\dots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Calcul des puissances de J
   (a) Préciser les matrices J et J^2. (on pourra distinguer les cas $n=2$ et $n \geqslant 2$).
   (b) Préciser les matrices J^n et J^k pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$.
   En déduire que $T = X^n - 1$ est annulateur de J.
   (c) Quel est le lien entre la matrice $J(a_0,\dots,a_{n-1})$ et les J^k, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$?
2. Une base de $\mathcal{A}$
   (a) Montrer que $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est une base de $\mathcal{A}$.
   (b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M commute avec J si et seulement si M commute avec tout élément de $\mathcal{A}$.
   (c) Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Diagonalisation de J. On rappelle que $T = X^n - 1$ est annulateur de J et de φ.
   On va démontrer que φ est diagonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, par analyse-synthèse.
   (a) Analyse. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1,\dots e'_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots \lambda_n)$.
   Exprimer simplement, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $\varphi(e'_k)$ dans la base $\mathcal{B}'$
   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $\lambda_k^n = 1$.

   On note $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $\mathbb{U}_n = \{\omega^k, k \in [\![0, n-1]\!]$.
   (c) Synthèse. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, Ker $(\varphi - \omega^k \mathrm{id})$ est un espace vectoriel de dimension 1.
   On pourra chercher un vecteur de Ker $(\varphi - \omega^k \mathrm{id})$ écrit dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$.
   (d) (**) Montrer que φ (donc J) est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
4. Diagonalisation de $\mathcal{A}$
   (a) Le sous-ensemble $\mathcal{A}$ est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
   (b) On rappelle qu'on a démontré que φ est diagonalisable dans une base $\mathcal{B}'$.
   Montrer qu'il existe une matrice P (que l'on explicitera comme matrice de passage) telle que $P^{-1}JP$ est diagonale.
   (c) Pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, que dire de la matrice $P^{-1}AP$?
   Conclure

C. Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

On se propose de montrer dans cette partie que la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égale à $n^2 - n + 1$.

Dans toute cette partie, $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ strictement incluse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note d sa dimension. On a donc $d < n^2$.
La trace de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée tr (M).
On désigne $\mathcal{A}^\perp$ l'ensemble.

$$\mathcal{A}^\perp = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall\, A \in \mathcal{A}, \mathrm{tr}\,(A^T B) = 0\}$$

appelé (espace) orthogonal de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\mathcal{A}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note r sa dimension.
   (b) Montrer qu'on a la somme directe $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp$. Quelle inégalité en déduit-on concernant les nombres d, r et n^2 ?
   (c) On considère $(A'_1,\dots A'_d)$ une base de $\mathcal{A}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_d$, $\Psi_k : B \mapsto \mathrm{tr}\,({A'_k}^T B)$.
   Montrer que $\mathcal{A}^\perp = \bigcap_{i=1}^{d} \mathrm{Ker}\ \Psi_k$.
   Quelle nouvelle inégalité en déduit-on concernant les nombres d, r et n^2 ?
   (d) En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp$. Quelle relation a-t-on entre d et r ?
   Jusqu'à la fin de cette partie III, on fixe une base $(A_1,\dots,A_r)$ de $\mathcal{A}^\perp$.

(e) Montrer que pour toute matrice $N \in \mathcal{A}$ et tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $N^T A_i \in \mathcal{A}^\perp$.

(f) (*) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que M appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\operatorname{tr}(A_i^T M) = 0$.

2. Conclusion.
Soit $\mathcal{A}^T = \{M^T | M \in \mathcal{A}\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{A}^T$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension que $\mathcal{A}$.

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels.

On rappelle qu'à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est associé canoniquement l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $X \mapsto MX$.

(b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $F = \operatorname{vect}(A_1 X, \dots, A_r X)$. Montrer que F est stable par les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{A}^T$.

(c) Montrer que $d \leq n^2 - n + 1$ et conclure.
On pourra exploiter les résultats trouvés en A.2..