Devoir à la maison n°11

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Problème

L'objectif du problème est d'établir l'assertion (1) suivante :

$$\forall\ (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \qquad \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}_+$$

Pour cela,

1. Nous commencerons par définir et étudier le polynôme caractéristique d'une matrice (partie I).
2. Puis, en partie II, nous montrerons que cette assertion (1) est équivalente à l'assertion (2) :
$$\forall\ C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \qquad \det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}_+$$
3. En partie III, nous démontrerons que (2) est vraie sous une certaine condition vérifiée par C
4. Nous exprimons, en partie IV, la condition précédente vérifiée par C sous forme d'un calcul de déterminant.
5. Enfin, dans la partie V *plus difficile*, nous démontrons que (2) (et donc (1)) est vraie dans le cas général.

Dans l'ensemble du devoir, si P est un polynôme, on notera $[P]_k$, le coefficient de P associé à X^k .
et si A est une matrice, on notera ${}^i[A]_j$, le coefficient de A en ligne i et colonne j.

On note, pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, $\overline{A}$, la matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall\ (i,j) \in \mathbb{N}_p \times \mathbb{N}_q, \qquad {}^i\left[\overline{A}\right]_j = \overline{{}^i[A]_j}$$

Partie I - Polynôme caractéristique, valeurs propres, diagonalisabilité

Dans cette partie, le corps de base est noté $\mathbb{K}$, il peut être égal à $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.
On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Polynôme caractéristique.
   (a) On note pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$.
   Montrer que χ_A est une fonction polynomiale. Quel est son degré ?
   On appelle χ_A, *polynôme caractéristique de A*.
   (b) Que vaut χ_{I_n} ?
   (c) Montrer que : 0 est racine de χ_A si et seulement si A n'est pas inversible.
   (d) Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Montrer que $\chi_A = \chi_B$
   (e) En déduire une définition acceptable de χ_u pour $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension égale à n.
2. Valeurs propres.
   Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid A \times X = \lambda \cdot X\} = \text{Ker}\ (A - \lambda I_n)$.
   On dit que λ *est une valeur propre de A* si il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, non nul tel que $A \times X = \lambda X$.
   Montrer les équivalences :
$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Longleftrightarrow E_\lambda(A) \neq \{0\} \Longleftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$$

3. Matrice diagonalisable.
   On dit que A *est diagonalisable* si A est semblable à une matrice diagonale.
   (a) Montrer que si A est diagonalisable, alors χ_A est scindé.
   (b) Supposons que χ_A soit scindé à racines simples, notées $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \lambda_n$.
   On note pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, X_i une colonne non nulle tel que $A \times X_i = \lambda_i \cdot X_i$.
      i. Démontrer que $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ est une famille libre
      (on pourra, par exemple, exploiter un déterminant de Vandermonde).
      ii. En déduire une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, une matrice P, inversible de changement de bases, une matrice diagonale D telle que $A = P \times D \times P^{-1}$.
      On précisera bien comment obtenir la matrice P.
   (c) Donner l'exemple d'une matrice diagonalisable mais dont le polynôme caractéristique n'est pas à racines simples.

On a ainsi montré :

$$\boxed{\begin{array}{l} A \text{ diagonalisable} \Longrightarrow \chi_A \text{ scindé} \\ \chi_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i), \text{ scindé à racines simples } \Longrightarrow \begin{cases} A \text{ diagonalisable} \\ \text{Les espaces propres } E_{\lambda_i}(A) \text{ sont de dimension 1} \end{cases} \\ \qquad\qquad \text{Mais la réciproque est fausse...} \end{array}}$$

Partie II - Premiers résultats concernant (1) et (2)

Dans cette partie, le corps de base est $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'assertion (1) dans le cas $n = 1$
2. Etude de la conjugaison dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\overline{A \times V} = \overline{A} \times \overline{V}$
   (b) Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{cccc} \Phi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & A & \longmapsto & \overline{A} \end{array} \right.$ est un automorphisme de $\mathbb{R}$-algèbre involutif.
   C'est-à-dire : $\forall\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$,
   $$\Phi(\lambda A + \mu B) = \lambda\Phi(A) + \mu\Phi(B), \qquad \Phi(A \times B) = \Phi(A) \times \Phi(B), \qquad \Phi \circ \Phi(A) = A$$
   (c) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.
   (d) En déduire que, pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $\det(A\overline{A}) \in \mathbb{R}_+^*$
3. On suppose dans cette question que A est inversible.
   (a) Calculer $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$
   (b) En déduire qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, à déterminer, telle que :
   $$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C})$$
4. Montrer que (1) et (2) sont équivalentes.
   Dans le cas où A n'est pas inversible, on peut considérer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A_x = A - xI_n$ inversible sauf sur un ensemble fini de points de $\mathbb{R}$ et exploiter la continuité des polynômes...

Partie III - Démonstration de (2) dans un cas particulier

On considère $\Omega = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_{C\overline{C}}$ est un polynôme scindé à racines simples$\}$. Soit $C \in \Omega$.

1. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.
   (a) Montrer que si A est inversible, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
   On pourra montrer que AB et BA sont semblables
   (b) Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
   On peut là aussi considérer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A_x = A - xI_n\ldots$
   (c) Montrer que $\chi_{C\overline{C}} \in \mathbb{R}[X]$.

2. Pourquoi $C\overline{C}$ est diagonalisable ? Que dire de la dimension des sous-espaces propres ?
3. Soit λ une valeur propre *réelle* de $C\overline{C}$ et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, un vecteur propre associée.

$$V \in E_\lambda(C\overline{C}) \qquad \text{et} \qquad V \neq 0$$

   (a) Montrer que $\overline{C}C\overline{V} = \lambda\overline{V}$
   (b) Montrer que $C\overline{V} \in E_\lambda(C\overline{C})$.
   En déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $C\overline{V} = \mu V$.
   On pourra raisonner sur les dimensions.
   (c) Calculer $C(\overline{\mu}\overline{V})$ de deux manières différentes. En déduire que $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
4. Montrer que $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$.

Partie IV - Résultants de deux polynômes

Soit $(q, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$, un couple d'entiers naturels non nuls.

Soient $P = \sum_{k=0}^{q} a_k X^k \in \mathbb{K}_q[X]$, un polynôme de degré q et $Q = \sum_{h=0}^{r} b_h X^h \in \mathbb{K}_r[X]$, un polynôme de degré r.

On pose

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) = \left|\begin{array}{cccccccccc}
a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & \vdots & b_0 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & a_0 & b_r & & & \ddots & 0 \\
a_q & & & \vdots & 0 & \ddots & & & b_0 \\
0 & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_q & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_r \\
\multicolumn{4}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{r \text{ colonnes}}} & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{q \text{ colonnes}}}
\end{array}\right| \in \mathbb{K}$$

$\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q)$ est appelé résultant de P et Q. C'est le déterminant d'une matrice carrée de taille $q+r$ appelée matrice de Sylvester et notée $\mathrm{Syl}(P,Q)$.

On pose $\mathcal{B} = \big((1,0), (X,0), \ldots, (X^{r-1},0), (0,1), (0,X), \ldots, (0,X^{q-1})\big)$ et $\mathcal{B}_{\text{can}} = (X^k)_{0 \leqslant k \leqslant q+r-1}$.

On considère enfin l'application $\left\{\begin{array}{llll} \Psi : & \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ & (U,V) & \longmapsto & PU + QV \end{array}\right.$.

1. Montrer $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.
2. Montrer que Ψ est une application linéaire.
3. On note alors M la matrice de Ψ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_{\text{can}}$.
   Quelle relation entre M et $\mathrm{Syl}(P,Q)$?
4. On suppose que $P \wedge Q = 1$.
   (a) Montrer que Ψ est injective.
   (b) En déduire que $\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) \neq 0$.
5. On suppose que $P \wedge Q \neq 1$.
   En déduire que Ψ n'est pas surjective, puis la valeur de $\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, on a montré que } P \wedge Q = 1 \text{ si et seulement si } \mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) \neq 0.}$$

On pose $\Delta(P) = \dfrac{(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}}{a_q}\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,P')$, où :
- P' désigne le polynôme dérivée de P
- $a_q = [P]_q$ est le coefficient dominant de P.

$\Delta(P)$ est appelé le discriminant de P.

6. On suppose que P est de degré 2 et on pose $P = aX^2 + bX + c$.
   Calculer $\Delta(P)$.
7. On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et donc $P \in \mathbb{C}[X]$.
   Montrer que P est un polynôme scindé à racines simples si et seulement si $\Delta(P) \neq 0$

Partie V - Fonctions polynomiales à plusieurs variables

Soit d un entier naturel non nul.
On dit qu'une fonction $P : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ est polynomiale lorsqu'il existe une partie finie S de $\mathbb{N}^d$ et une famille $(a_k)_{k\in S}$ de nombres complexes telles que

$$\forall\ (x_1, x_2, \dots x_d) \in \mathbb{C}^d, \qquad P(x_1, \dots x_d) = \sum_{(k_1,k_2,\dots k_d)\in S} a_{(k_1,k_2,\dots k_d)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_d^{k_d}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\det(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\ &= x_1x_5x_9 + x_2x_6x_7 + x_3x_4x_8 - x_1x_8x_6 - x_2x_4x_9 - x_3x_5x_7\end{aligned}$$

est un polynôme de 9 variables, avec par exemple $a_{1,0,0,0,0,1,0,1,0} = -1\dots$

On admet, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, det est un polynôme de n^2 variables : les coefficients de la matrice.

Soit P une fonction polynomiale. On pose $Z_P = \{(x_k)_{1\leqslant k\leqslant d} \in \mathbb{C}^d \mid P(x_1, x_2, \dots x_d) = 0\}$.

1. Soient $I_1, I_2, \dots I_d$ des parties infinies de $\mathbb{C}$. On suppose que $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d \subset Z_P$.
Montrer que P est la fonction polynomiale nulle, i.e. que tous ses coefficients sont nuls.
On pourra procéder par récurrence sur d.

On rappelle que $\Omega = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_{C\overline{C}}$ est un polynôme scindé à racines simples $\}$.

2. Montrer, à l'aide du discriminant, qu'il existe une fonction polynomiale $R : \mathbb{C}^{n^2} \to \mathbb{C}$, non nulle telle que :
$$C \in \Omega \Longleftrightarrow R(C) \neq 0$$
3. Démontrer alors que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $C_p \in \Omega$ tel que $\forall\ i, j \in \mathbb{N}_n$, $\left|{}^i[C_p - C]_j\right| < \frac{1}{p}$
4. Démontrer l'assertion (2).
On pourra également utiliser les résultats de la partie III
5. (a) En déduire plus généralement que, pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :
$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+, \qquad \det(\lambda I_n + C\overline{C}) \geqslant 0$$
   (b) En déduire que si M est une matrice telle qu'il existe $A \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M = A^2$, alors les valeurs propres réelles strictement négatives de M sont de multiplicité paire.