

Devoir à la maison n°10

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.

Exercice

Soit $n \geq 1$ et $p \geq 0$ des entiers. On note F_n^p l'ensemble des parties de $\mathbb{N}_n$ à p éléments ne contenant aucune paire d'entiers consécutifs. On note K_n^p le cardinal de F_n^p .

1. Déterminer K_n^p quand $p > \frac{n+1}{2}$
2. Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ un élément de F_n^p écrit de sorte que $a_i < a_{i+1}$. On pose $b_k = a_k + 1 - k$. Prouver que $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_p \leq n + 1 - p$.
3. Soit G_n^p l'ensemble des parties à p éléments de $\mathbb{N}_{n+1-p}$. Construire une bijection de F_n^p sur G_n^p .
4. En déduire la valeur de K_n^p .
5. Application : au loto on tire 6 numéros dans $\mathbb{N}_{49}$. Combien de tirages ne contiennent aucune paire d'entiers consécutifs ?

Problème

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $W = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. (a) Calculer la matrice $A^2 + I_3$
(b) En déduire, que pour tout $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A^2X = \alpha W - X$.
(c) Déterminer le noyau de A , puis son rang.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
(a) Démontrer que la famille (W, X, AX) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si $X \notin \text{Ker } A$.
(b) On suppose que $X \notin \text{Ker } A$. On note P la matrice dont les colonnes sont $C_1(P) = W$, $C_2(P) = X$ et $C_3(P) = AX$.
Evaluer $A \times P$, puis pour tout $i \in \mathbb{N}_3$, exprimer $C_i(AP)$ dans la base (W, X, AX) .
(c) En déduire l'existence d'une matrice T' tel que $AP = P \times T'$. On exprimera T' explicitement.
3. On considère $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(a) Montrer qu'il existe une infinité de base $\mathcal{B}$ de E telles que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = W$ (u canoniquement associé à A).
Déterminer l'ensemble X de ces bases.
(b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{P} = \{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}; (\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in X^2\}$ où $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
(c) L'ensemble $\mathcal{P}$ est-il un sous-groupe du groupe $(GL_3(\mathbb{R}), \times)$.