Devoir surveillé n°7

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Problème - Polynôme annulateur et sous-espace cylique

Dans toute cette partie, on note $\mathbb{K}$, un corps (qui est $\mathbb{R}$ en première partie).
Pour tout polynôme $\pi \in \mathbb{K}[X]$, on note (π) l'ensemble $\pi \cdot \mathbb{K}[X] = \{\pi \times Q, Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

n désigne un entier fixé dans tout le sujet et on fixe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice carrée d'ordre n.
On note $\mathbb{K}[M] = \{T(M), T \in \mathbb{K}[X]\}$, l'ensemble des polynômes en M.

On commence par se familiariser avec quelques notions ou sous-espaces à partir de trois exemples (partie I). Puis, on démontre quelques résultats sur l'arithmétique des polynômes : lien idéaux et division euclidienne (partie II). On exploite alors ces structures autour des polynômes en M, cela nous donne l'existence d'un polynôme minimal, annulateur de M (partie III). Enfin, en exploitant le lemme des noyaux, on optimise la majoration du degré du polynôme annulateur (partie IV).

I. Etude de cas particuliers /19

Dans cette partie, on se concentre sur trois matrices $A, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
Dans les parties suivantes, elles pourront de nouveau être mobilisées.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Etude de A. On considère $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer AX_1 puis AX_2, A^2X_2 et A^3X_2.
   (b) On note $T_2 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$. Montrer que $T_2(A) \times X_2 = 0$ (colonne nulle)
   (c) Donner un polynôme de degré 1, $T_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $T_1(A) \times X_1 = 0$ (colonne nulle)
   (d) Que valent $T_1 \wedge T_2$ et $T_1 \vee T_2$?
2. Etude de B.
   On note $I_B = \{BX, X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})\}$ et $K_B = \{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid BX = 0\}$
   (a) Montrer que I_B et K_B sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer $\dim(I_B)$ et $\dim(K_B)$.
   Vérifier que $\dim(I_B) + \dim(K_B) = 4$ (*Théorème du rang...*).
   (c) La matrice B est-elle inversible ? Si oui, calculer B^{-1}.
   (d) Montrer que $B^4 = B^2$.
   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4$, exprimer B^n. La formule reste-t-elle vraie pour $n = 3$?
3. Etude de C
   (a) Calculer C^2 et C^3.
   (b) On note $\pi = X^3 - 2X^2 - X + 2$. Montrer que $\pi(C) = 0$.
   (c) La matrice C est-elle inversible ? Si oui, calculer C^{-1}.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer C^n. La formule reste-t-elle vraie pour $n = -1$?
   (e) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ non nul, $P(C) \neq 0$.

II. Idéaux de $\mathbb{K}[X]$. /14

Pour un anneau commutatif $(\mathcal{A},+,\times)$, on dit que $\mathcal{I}(\subset \mathcal{A})$ est idéal de $\mathcal{A}$ si $(\mathcal{I},+)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{A},+)$ et $\forall\ x\in\mathcal{I}\ \forall\ y\in\mathcal{A}$ et $x\times y\in\mathcal{I}$.
Ainsi, *pour démontrer que* $\mathcal{I}(\subset\mathcal{A})$ *est idéal de* $\mathcal{A}$, il suffit donc de montrer que :
— $\mathcal{I}\subset\mathcal{A}$
— $0_{\mathcal{A}}\in\mathcal{I}$ (élément neutre de l'addition)
— $\forall\ x_1,x_2\in\mathcal{I}$, on a $x_1-x_2\in\mathcal{I}$
— $\forall\ x\in\mathcal{I}\ \forall\ y\in\mathcal{A}$, on a $x\times y\in\mathcal{I}$

1. Soit $\pi\in\mathbb{K}[X]$. Montrer que (π) est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. (Définition de (π) en début d'énoncé)
2. Réciproquement, considérons un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0\}$.
   (a) Montrer que $\big\{\deg P, P\in\mathcal{I}\setminus\{0\}\big\}$ admet un plus petit élément, noté r.
   (b) Soit $\pi\in\mathcal{I}$ tel que $\deg\pi=r$.
   Soit $S\in\mathcal{I}$, en exploitant la division euclidienne de S par π, montrer que $S\in(\pi)$.
   (c) En déduire que $\mathcal{I}=(\pi)$.

On dit que le polynôme π engendre l'idéal $\mathcal{I}$. Il n'y a qu'un seul polynôme unitaire qui engendre $\mathcal{I}$.

3. Structure de $\dfrac{\mathbb{K}[X]}{(\pi)}$ (défini plus loin). On fixe $\pi\in\mathbb{K}[X]$. On note $r=\deg\pi$
   Pour $M_1,M_2\in\mathbb{K}[X]$, on note $M_1\equiv M_2[\pi]$ si et seulement si $M_1-M_2\in(\pi)$
   (a) Montrer que $\equiv[\pi]$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{K}[X]$.

On note $\overline{M}$, la classe de M pour cette relation d'équivalence et $\dfrac{\mathbb{K}[X]}{(\pi)}$ l'ensemble de ces classes.

   (b) Soit $\varphi_\pi : \begin{array}{ccc}\mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}_{r-1}[X]\\ Q & \mapsto & Q\%\pi\end{array}$ (reste de la division euclidienne de Q par π).
   Montrer que φ_π est surjective et que : $\varphi_\pi(M_1)=\varphi_\pi(M_2)$ ssi $M_1\equiv M_2[\pi]$.

On en déduit que $\overline{\varphi_\pi} : \begin{array}{ccc}\frac{\mathbb{K}[X]}{(\pi)} & \longrightarrow & \mathbb{K}_{r-1}[X]\\ \overline{Q} & \longmapsto & Q\%\pi\end{array}$ est bien définie et est bijective.

   (c) Montrer que les opérations $\overline{+}$ et $\overline{\times}$ définies sur $\dfrac{\mathbb{K}[X]}{(\pi)}$ par :
   $$\overline{M_1}\,\overline{+}\,\overline{M_2}=\overline{M_1+M_2}\qquad\text{et}\qquad\overline{M_1}\,\overline{\times}\,\overline{M_2}=\overline{M_1\times M_2}$$
   sont bien opérantes (*i.e. indépendantes de représentants choisis pour chaque classe*).

<u>On admet</u> qu'ainsi $\left(\frac{\mathbb{K}[X]}{(\pi)},\overline{+},\overline{\times}\right)$ est un anneau.

   (d) Montrer que $\left(\frac{\mathbb{K}[X]}{(\pi)},\overline{+},\overline{\times}\right)$ est un corps si et seulement si π est irréductible.

<u>On admet</u> également que $\bar{\cdot}$ est bien définie sur $\mathbb{K}\times\frac{\mathbb{K}[X]}{(\pi)}$ comme opération externe (avec $\mathbb{K}$ comme domaine).

   (e) Montrer que $\left(\frac{\mathbb{K}[X]}{(\pi)},\overline{+},\bar{\cdot}\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension r.
   On pourra montrer que $\left(\overline{1},\overline{X},\dots\overline{X^{r-1}}\right)$ *en est une base.*

III. Polynôme annulateur et polynômes conducteurs /12

On considère dans cette partie les deux espaces vectoriels $\mathcal{M}=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $E=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On fixe $M\in\mathcal{M}$ une matrice, on note $\mathcal{I}_M=\{P\in\mathbb{K}[X]\mid P(M)=0_{\mathcal{M}}\}$ et $\mathbb{K}[M]=\{T(M),T\in\mathbb{K}[X]\}$.
Puis, pour toute matrice colonne $X\in E$, on note également $\mathcal{I}_{M,X}=\{P\in\mathbb{K}[X]\mid P(M)\times X=0_E\}$ ainsi que $\mathbb{K}[M]X=\{T(M)\times X,T\in\mathbb{K}[X]\}$. En partie I, nous avions obtenu $T_1\in\mathcal{I}_{A,X_1}$ et $T_2\in\mathcal{I}_{A,X_2}$.

1. Espaces de dimensions finis.
   (a) Quelles sont les dimensions des espaces $\mathcal{M}$ et E ?
   (b) On note $C(M):=\text{vect}\{M^k,k\in\mathbb{N}\}$. Montrer que $C(M)=\mathbb{K}[M]$ et est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{M}$.
   On note $r_M=\dim C(M)$.

<u>On admet</u> également que $\mathbb{K}[M]X=\{T(M)\times X,T\in\mathbb{K}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

   (c) Montrer $(C(M),+,\times)$ est un sous-anneau commutatif de $(\mathcal{M},+,\times)$.
2. Idéaux
   (a) Montrer que $\mathcal{I}_M$ et $\mathcal{I}_{M,X}$ sont des idéaux de $\mathbb{K}[X]$.
   Lequel est inclus dans l'autre.

On appelle polynôme minimal de M, noté π_M, le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ unitaire tel que $(\pi_M)=\mathcal{I}_M$.

On appelle polynôme conducteur de M en X (ou minimal de(M,X)), noté $\pi_{M,X}$, le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ unitaire tel que $(\pi_{M,X}) = \mathcal{I}_{M,X}$.

(b) Montrer que la famille $\left(I_n, M, M^2, \dots M^{\deg \pi_M - 1}\right)$ est libre.

(c) Montrer que $C(M) = \text{vect}\left(I_n, M, M^2, \dots M^{\deg \pi_M - 1}\right)$.
On pourra exploiter une division euclidienne par π_M.

(d) En déduire que $\deg \pi_M = r_M$ (défini en 1.(b)). Quelle majoration pour $\deg \pi_M$ obitent-on ?

(e) Montrer que $\pi_{M,X} | \pi_M$ (divise)

IV. Lemme des noyaux /27

Soit M une matrice de $\mathcal{M}$ et π_M son polynôme minimal.

On suppose que π_M se décompose en produit d'irréductibles : $\pi_M = \displaystyle\prod_{i=1}^{s} P_i^{\alpha_i}$

où pour tout $i \in \mathbb{N}_s$, P_i est unitaire irréductible dans l'anneau euclidien $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

On note, pour tout $i \in \mathbb{N}_s$, $K_i = \{X \in E \mid P_i^{\alpha_i}(M) \times X = 0\}$, c'est un sous espace vectoriel de E.

1. On commence par montrer le lemme des noyaux : $E = K_1 \oplus K_2 \cdots \oplus K_s$.
Pour cela on note pour tout $i \in \mathbb{N}_s$, $Q_i = \displaystyle\prod_{j \in \mathbb{N}_s \setminus \{i\}} P_j^{\alpha_j}$. On a donc $P_i^{\alpha_i} Q_i = \pi_M$

(a) En exploitant une relation de Bézout, montrer que
$$\forall\ i \in \mathbb{N}_s, \exists\ U_i \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } I_n = \sum_{i=1}^{s} U_i(M) Q_i(M)$$

(b) En déduire que pour tout $X \in E$, il existe $(N_i)_{i \in \mathbb{N}_s} \in K_1 \times K_2 \cdots \times K_s$ tel que : $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} N_i$.

(c) Qu'en déduit-on pour la somme $K_1 + K_2 + \cdots + K_s$?

(d) On considère maintenant $(x_1, x_2, \cdots x_s) \in K_1 \times K_2 \cdots \times K_s$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} x_i = 0$.
Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}_s$, $x_i = 0$.
On pourra commencer par montrer que $Q_j(M)x_i = 0$ si $i \neq j$, puis également $j = i$ et exploiter la relation trouvée en 1.(a).

(e) Qu'en déduit-on pour la somme $K_1 + K_2 + \cdots + K_s$?

2. <u>On admet</u> que *si une matrice $A \in \mathcal{M}$ n'est pas inversible,*
alors il existe $X \in E$ tel que $AX = 0$ (colonne nulle) - résultat démontré en cours mardi.

(a) Montrer que si $\pi_M = P_1 \times P_2$, avec $\deg P_1 > 0$, alors nécessairement $P_1(M)$ n'est pas inversible.

(b) En exploitant le résultat admis ici, montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}_s$, $K_i \neq \{0\}$.

(c) (*) Supposons que pour tout $X \in E$ tel que $P_i^{\alpha_i}(M) \times X = 0$, on ait $P_i^{\alpha_i - 1}(M) \times X = 0$.
Montrer qu'on a alors le résultat contradictoire $\frac{\pi_M}{P_i}(M) = 0$.
En déduire l'existence de $X \in K_i$ tel que $P_i^{\alpha_i - 1}(M) \times X \neq 0$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_s$, on considère un élément $X_i \in K_i$ tel que $P_i^{\alpha_i - 1}(M) \times X \neq 0$

3. On montre maintenant qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $\pi_M = \pi_{M,X}$

(a) Montrer que le polynôme conducteur de M en X_i est $\pi_{M,X_i} = P_i^{\alpha_i}$

(b) On rappelle que pour tout $i \in \mathbb{N}_s$, on note $\mathbb{K}[M]X_i = \{P(M) \times X_i, P \in \mathbb{K}[X]\}$.
Montrer que $\mathbb{K}[M]X_i \subset K_i$.

(c) En déduire qu'on a la somme directe : $\displaystyle\bigoplus_{h \in \mathbb{N}_s} \mathbb{K}[M]X_h$

(d) On note $X = \displaystyle\sum_{h \in H} X_h$. Montrer que $\pi_{M,X} = \displaystyle\bigvee_{h \in H} \pi_{M,X_h}$ (PPCM).

(e) Qu'en déduire concernant le degré de π_M ?

4. Pré-décomposition de Fröbenius.
On fixe $i \in \mathbb{N}_s$ et on note $d_i = \deg P_i^{\alpha_i}$.

(a) Montrer que $(X_i, MX_i, \dots M^{d_i - 1}X_i)$ est une famille libre.

(b) On note R_i, la matrice de $\mathcal{M}_{n,d_i}(\mathbb{K})$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}_{d_i}$, $C_j(R_i) = M^{j-1}X_i$.
Evaluer (par produit en bloc de colonnes) la matrice $M \times R_i$.

(c) Donner une matrice F_i « simple »de $\mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{K})$ telle que $M \times R_i = R_i \times F_i$.

F_i s'appelle la matrice compagnon du polynôme $P_i^{\alpha_i}$.

En combinant bien toutes les matrices F_i, on obtient la décomposition de Fröbenius de M.