Devoir à la maison n°9
CORRECTION

Problème

A. Construction de la famille de polynômes de Tchebychev

On définit la suite des polynômes de Tchebychev par $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$$

1. Construction de (T_n).

   (a) On a

$$\boxed{T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1 \quad T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 3X \quad T_4 = 2XT_3 - T_2 = 8X^4 - 8X^2 + 1}$$

   (b) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}_n :\ll \deg T_n = n \text{ et } [T_n]_n = 2^{n-1} \gg$$

   — $\mathcal{P}_1$ est vraie, car $T_1 = X = 2^{1-1}X^1$
   — $\mathcal{P}_2$ est vraie, car $T_2 = 2X^2 - 1$
   — Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies.
   Alors $\deg 2XT_{n+1}(X) = 1 + \deg(T_{n+1}) = n + 2$ et $\deg T_n = n$.
   Comme les degrés sont différents :

$$\deg T_{n+2} = \max(2XT_{n+1}; T_n) = \max(n+2, n) = n + 2$$

$$[T_{n+2}]_{n+2} = [2XT_{n+1}]_{n+2} = 2 \times 1 \times [T_{n+1}]_{n+1} = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

   d'après $\mathcal{P}_{n+1}$.
   Ainsi, $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraies.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \deg(T_n) = n \text{ et } [T_n]_n = 2^{n-1}}$$

   Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{Q}_n :\ll \forall\, x \in \mathbb{R},\ T_n(-x) = (-1)^n T_n(x) \gg$$

   — $\mathcal{Q}_0$ est vraie, car $T_0 = 1$
   — $\mathcal{Q}_1$ est vraie, car $T_1 = X$
   — Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ sont vraies.
   Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$T_{n+2}(-x) = 2(-x)T_{n+1}(-x) - T_n(-x) = -(-1)^{n+1}2xT_{n+1}(x) - (-1)^n T_n(x) = (-1)^{n+2}[2xT_{n+1}(x) - T_n(x)]$$

   Ainsi $\mathcal{Q}_{n+2}$ est vraies.

$$\boxed{\text{Pour tout } n,\ T_n \text{ a} \ll \text{la parité} \gg \text{de } n}$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \leqslant n + 2$

$$[T_{n+2}]_k = 2[XT_{n+1}]_k - [T_n]_k = 2[T_{n+1}]_{k-1} - [T_n]_k$$

   Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{H}_n :\ll \forall\, k \in \mathbb{N}, [H_n]_k \in \mathbb{Z} \gg$$

   — $\mathcal{H}_0$ est vraie.
   — $\mathcal{H}_1$ est vraie.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ sont vraies.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$[T_{n+2}]_k = 2[XT_{n+1}]_k - [T_n]_k = 2[T_{n+1}]_{k-1} - [T_n]_k \in \mathbb{Z}$$

   car $\mathbb{Z}$ est un anneau. Donc $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie.

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}, \text{ tous les coefficients de } T_n \text{ sont des entiers relatifs.}}$$

(d) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\deg T_k = k$.
Donc la famille $(T_0, T_1, \dots T_n)$ est une famille de degrés échelonnés, il s'agit d'une famille libre.
Tous les polynômes T_k sont dans $\mathbb{R}_n[X]$, la famille est composée de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$.

$$\boxed{\text{Donc pour tout } n\in\mathbb{N},\ (T_0, T_1, \dots T_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

2. Autre expression.

(a) Là encore, on démontre le résultat par récurrence.
$T_0(\cos x) = 1 = \cos 0$ et $T_1(\cos x) = \cos x$. L'initialisation est vérifiée.
Soit $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos x) &= 2\cos x T_{n+1}(\cos x) - T_n(\cos x) = 2\cos x\cos(n+1)x - \cos(nx) \\ &= [\cos((n+1)x + x) + \cos((n+1)x - x)] - \cos(nx) = \cos((n+2)x) \end{aligned}$$

L'hérédité est vérifiée.

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N} \text{ et tout } x\in\mathbb{R},\ T_n(\cos x) = \cos(nx).}$$

(b) On a alors

$$\boxed{T_n(0) = T_n(\cos\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{n\pi}{2}) = (-1)^{n/2}\mathbf{1}_{2\mathbb{Z}}(n)}$$

$$\boxed{T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos(n0) = 1 = -T_n(-1)}$$

par imparité

(c)

Piste de recherche...

*La question est claire : il faut **exprimer** ces racines. Il faut donc résoudre $T_n(y) = 0$.*
Avec la relation caractéristique (avec cos), on saura en trouver un certain nombre (celles situées dans $[-1, 1]$). Espérons qu'on les trouvera toutes (au plus n)...

Rappelons que la fonction arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ est bijective.
Soit y une racine de T_n dans l'intervalle $[-1, 1]$, il existe $x\in[0, \pi]$ tel que $y = \cos x$ (en fait $x = \arccos(y)$).

$$T_n(y) = 0 = T_n(\cos x) = \cos(nx) \Longrightarrow nx \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Longrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\pi}{n}\right]$$

Notons $x_k = \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} = \frac{2k+1}{2n}\pi$. On a alors

$$x_k \in [0, \pi] \Longleftrightarrow 0 \leqslant 2k+1 \leqslant 2n \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant n - \frac{1}{2}$$

Il y a donc exactement n valeurs distinctes possibles pour $x_k\in[0,\pi]$: x_0, x_1,...x_{n-1}.
Par ailleurs, cos est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$,
Donc il y a donc exactement n valeurs distinctes possibles pour y : $\cos(x_0)$, $\cos(x_1)$,...$\cos(x_{n-1})$.
Or T_n, de degré n admet au plus n racines, donc on les a toutes !

$$\boxed{\text{Ainsi, } T_n \text{ admet } n \text{ racines réelles distinctes : les } y_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \text{ pour } k\in[\![0, n-1]\!]}$$

(d)

Piste de recherche...

On peut sûrement (mais je ne le ferais pas) chercher à appliquer la même méthode : exprimer T_n, puis T_n' puis ses racines.
Mais là l'énoncé de demande pas d'expliciter les racines de T_n', mais seulement de montrer leur existence.
Cela rappelle le théorème de Rolle. On va donc regarder les polynômes du point de vue des fonctions (polynomiales, donc)

Notons $t_n : x \mapsto T_n(x)$ et t'_n, sa dérivée. On a alors $t'_n(x) = (T'_n)(x)$.
On sait que T_n donc t_n s'annule en y_k et que les y_k sont distincts,
plus précisément : $y_0 > y_1 > \cdots > y_{n-2} > y_{n-1}$.
Appliquons $n-1$ fois le théorème de Rolle entre les points y_k et y_{k+1} (pour $k \in [\![0, n-2]\!]$).
$t_n(y_k) = t_n(y_{k+1}) = 0$, donc il existe $z_k \in]y_{k+1}, y_k[$ telles que $t'_n(z_k) = 0$
On a donc l'entrelacement : $y_0 > z_0 > y_1 > z_1 > y_2 \cdots > y_{n-2} > z_{n-2} > y_{n-1}$ avec $T_n(y_k) = 0$ et $T'_n(z_k) = 0$

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2,\ T'_n \text{ admet } (n-1) \text{ racines réelles distinctes.}}$$

B. Relation différentielle

1. Suivant les indications (et avec la notion de la question précédente),
$\varphi_n = t_n \circ \cos$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, par composition.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'_n(x) = -\sin(x) \times t'_n(\cos(x)) \quad \text{et} \quad \varphi''_n(x) = -\cos(x)t'_n(\cos(x)) + \sin^2(x)t''_n(\cos x)$$

Par ailleurs, $\varphi_n(x) = \cos(nx)$, donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'_n(x) = -n\sin(nx) \quad \text{et} \quad \varphi''_n(x) = -n^2\cos(nx)$$

Donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad -n^2\cos(nx) = -n^2 t_n(\cos x) = \varphi''_n(x) = -\cos(x)t'_n(\cos x) + (1-\cos^2(x))t''_n(\cos x)$$

Donc pour tout $y \in [-1, 1]$ ($y = \cos x$)

$$-n^2 T_n(y) = (1-y^2)T''_n(y) - yT'_n(y)$$

Ainsi $R = (1-X^2)T''_n - XT'_n + n^2 T_n$ admet une infinité de racines (tout $y \in [-1, 1]$), donc $R = 0$.

$$\boxed{\text{Bilan : } T_n \text{ vérifie la relation différentielle : } n^2 T_n - XT'_n + (1-X^2)T''_n = 0}$$

2. **Piste de recherche...**
Le principe est le suivant :
(a) On écrit chaque polynôme : T_n, T'_n et T''_n sous forme de somme.
(b) On addition ceux-ci en associant bien ensemble tous les termes associés à X^k (pour tout k)
(c) On identifie avec le polynôme nul : cela donne une relation de récurrence sur les a_k
(d) On essaye de résoudre cette relation de récurrence.
Il est d'un usage très fréquent avec les équations différentielles, en particulier lorsqu'on recherche des solutions de ces équations sous forme de série entière (i.e. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$) comme on le fait souvent en seconde année. L'intérêt de cette question est donc de s'entrainer pour ce calcul...

On écrit $T_n = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$. Bien qu'elle semble infinie, cette somme est bien finie, puisque pour $k > \deg T_n = n$, $a_k = 0$.
On a alors $T'_n = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} k a_k X^{k-1}$ et donc $XT'_n = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} k a_k X^k$

Remarques !
Notons que cette somme pourrait commencer à 1, car le premier terme correspondant à $k = 0$ est nul : c'est $0 \times a_0$.
Mais pour faciliter les additions qui vont suivre, on a intérêt à avoir les même valeurs d'indice de somme (cela évite l'étude de cas particuliers pléthoriques)

On a de même $T''_n = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} k(k-1)a_k X^{k-2}$. Donc $X^2 T''_n = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} k(k-1)a_k X^k$,
on a intérêt à noter $1T''_n = \displaystyle\sum_{h\in\mathbb{N}} (h+2)(h+1)a_{h+2}X^h$ ($h = k-2$ et somme de $k = 2$ à...)
On a donc

$$n^2 T_n - XT'_n + (1-X^2)T''_n = n^2 T_n - XT'_n + T''_n - X^2 T''_n = 0$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \big(n^2 a_k - k a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k\big)X^k = 0$$

On peut identifier :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad n^2 a_k - k a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k = (n^2 - k - k^2 + k)a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2} = 0$$

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, k < n \qquad a_k = \frac{(k+1)(k+2)}{k^2 - n^2} a_{k+2} = \frac{(k+1)(k+2)}{(k-n)(k+n)} a_{k+2}$$

(On prend $k < n$, pour que le dénominateur soit non nul. Et que $a_k > 0$, si $k > n$ car $\deg(T_n) = n$).

$$\boxed{\text{On a donc (avec } h = k-2\text{) : } \forall\, h \leqslant n,\ a_{h-2} = \frac{h(h-1)}{(h-2-n)(h-2+n)} a_h}$$

On a donc en posant $h = n - 2p$: $a_{n-2p-2} = \dfrac{(n-2p)(n-2p-1)}{(-2p-2)(2n-2p-2)} a_{n-2p} = \dfrac{(n-2p)(n-2p-1)}{(-4)(p+1)(n-(p+1))} a_{n-2p}$
Puis, en multipliant cette relation (pour p de 0 à $P - 1 \leqslant \frac{n}{2}$) on obtient

$$a_{n-2}a_{n-4}\dots a_{n-2P+2}a_{n-2P} = \prod_{p=0}^{P-1} a_{n-2p-2} = \prod_{p=0}^{P-1} \left(\frac{(n-2p)(n-2p-1)}{(-4)(p+1)(n-(p+1))} a_{n-2p} \right)$$

$$= \frac{n!}{(n-2P)!} \frac{1}{(-4)^P} \frac{1}{P!} \frac{(n-P-1)!}{(n-1)!} \prod_{p=0}^{P-1} a_{n-2p}$$

$$= \frac{n}{(-4)^P (n-P)} \binom{N-P}{P} a_n a_{n-2} \dots a_{n-2P+2}$$

Et donc comme $a_n = 2^{n-1}$ et en simplifiant par $a_{n-2}a_{n-4}\dots a_{n-2P+2}$, on obtient :

$$\boxed{\forall\, P \leqslant \frac{n}{2}, \qquad a_{n-2P} = (-1)^P 2^{n-2P-1} \frac{n}{n-P} \binom{N-P}{P}}$$

C. Produit scalaire

1. Soient $n, m \in \mathbb{N}$, deux entiers distincts.

$$\int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)\mathrm{d}t = \int_0^\pi [\cos((n+m)t) + \cos((n-m)t)]\mathrm{d}t$$

Comme $n + m \neq 0$ et $n - m \neq 0$:

$$\int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+m} \sin((n+m)t) + \frac{1}{n-m} \sin((n-m)t) \right]_0^\pi = 0$$

car $\sin k0 = \sin k\pi = 0$ pour tout entier k.

$$\boxed{\int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)\mathrm{d}t = 0}$$

2. Produit scalaire. On note pour tout couple de polynôme (R, S) :

$$\langle R, S \rangle = \int_0^\pi R(\cos t)S(\cos t)\mathrm{d}t$$

(a) Soit S fixé. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $R_1, R_2 \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2, S \rangle &= \int_0^\pi \lambda_1 [R_1(\cos t) + \lambda_2 R_2(\cos t)] S(\cos t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda_1 \int_0^\pi R_1(\cos t)S(\cos t)\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_0^\pi R_2(\cos t)S(\cos t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda_1 \langle R_1, S \rangle + \lambda_2 \langle R_2, S \rangle \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } S \text{ fixé, l'application } R \mapsto \langle R, S \rangle \text{ est linéaire.}}$$

(b) Par commutativité du produit :

$$\boxed{\langle R, S \rangle = \langle S, R \rangle}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_n\rangle &= \int_0^\pi T_n^2(\cos t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos^2(nt)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2nt)}{2}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2nt)}{4n}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Et comme $T_0 = 1$, on a donc $\langle T_0, T_0\rangle = \int_0^\pi \mathrm{d}t = \pi$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \langle T_n, T_n\rangle = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n \geqslant 1 \\ \pi & \text{si } n = 0 \end{cases}.}$$

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons $n = \deg P$.

   On a vu que $(T_0, T_1, \dots T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Donc il existe $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k$.

   Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Par linéarité du produit scalaire :

$$\langle P, T_j\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k \langle T_k, T_j\rangle = a_j\langle T_j, T_j\rangle + \sum_{k\neq j} a_k \underbrace{\langle T_k, T_j\rangle}_{=0} = a_j\frac{\pi}{2}$$

   Donc $a_j = \dfrac{2\langle P, T_j\rangle}{\pi}$.

   Et de même pour $j = 0$: $\langle P, T_0\rangle = a_0\pi$, donc $a_0 = \dfrac{\langle P, T_0\rangle}{\pi}$

$$\boxed{\text{Pour tout polynôme } P \in \mathbb{R}[X],\ P = \frac{\langle P, T_0\rangle}{\pi}T_0 + \sum_{k=1}^{\deg P} \frac{2\langle P, T_n\rangle}{\pi}T_n}$$

D. Arithmétique des polynômes de Tchebychev

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n = 0$.

1. **Piste de recherche...**

   Pour calculer le PGCD, ce que l'on sait faire, c'est appliquer l'algorithme d'Euclide donc les division euclidiennes.

   Est-ce que la relation donnée ne nous aiderait pas ?

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$, avec $\deg T_n = n < n+1 = \deg T_{n+1}$,

   Donc par unicité de la division euclidienne, le reste de la division de T_{n+2} par T_{n+1} est T_n.

   Et donc, d'après l'algorithme d'Euclide : $T_{n+2} \wedge T_{n+1} = T_{n+1} \wedge T_n$.

   Par conséquent, la suite $(T_{n+2} \wedge T_{n+1})_n$ est une suite constante, elle vaut $T_1 \wedge T_0 = 1$

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} \wedge T_n = 1.}$$

2. **Piste de recherche...**

   La seconde méthode pour trouver un dénominateur polynomial commun consiste à exploiter les racines :

   Si $P|Q$, alors toutes les racines de P sont des racines de Q.

   On a donc $T_n \wedge T_m = \prod_{a \mid T_n(a)=0, T_m(a)=0} (X-a)$.

   Or en B.5., nous avons fait la liste des racines de T_n.

   Commençons donc par une rappel :

   T_n admet n racines réelles distinctes : les $y_k = \cos\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

   (a) **Remarques !**

   On démontre en deux temps : $T_\delta | T_m$ et $T_\delta | T_n$, donc T_δ est un diviseur de T_n et de T_m.

   Pour cela on démontre que toutes les racines de T_δ sont des racines de T_n et T_m.

   Puis on démontre, réciproquement, que T_δ est le plus grand :

   Là, on montre que toutes les racines communes de T_n et T_m sont des racines de T_δ

• Les racines de T_δ sont exactement les nombres $\cos\left(\dfrac{2k+1}{2\delta}\pi\right)$ pour $k \in [\![0, \delta-1]\!]$.
En multipliant par $\frac{n_1}{n_1}$, on a donc :
$\cos\left(\dfrac{(2k+1)n_1}{2n_1\delta}\pi\right) = \cos\left(\dfrac{(2k+1)n_1}{2n}\pi\right)$ pour $k \in [\![0, \delta-1]\!]$ est une racine de T_δ.
Or $0 \leqslant (2k+1)n_1 = 2kn_1 + n_1 \leqslant [2(\delta-1)+1)n_1 + n_1] = (2\delta-1)n_1 + n_1 = 2\delta n_1 = 2n$.
En outre comme n_1 est impair, $(2k+1)n_1$ est également impair (produit de deux impairs),
Et donc il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $(2k+1)n_1 = 2K+1$, avec $2K+1 \leqslant 2n$, donc $K \leqslant n - \frac{1}{2}$,
c'est-à-dire que $K \leqslant n-1$, puisque c'est un nombre entier.
Donc la racine de T_δ : $\cos\left(\frac{(2k+1)n_1}{2n_1\delta}\pi\right) = \cos\left(\frac{2K+1}{2n}\pi\right)$ est également une racine de T_n.
On montre de même que toutes les racines de T_δ sont des racines de T_m.
• Réciproquement, T_n et T_m admettent une racines commune y,
si et seulement si il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$, $h \in [\![0, m-1]\!]$ tel que $\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) = \cos\left(\frac{2h+1}{2m}\pi\right)$.
si et seulement si il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$, $h \in [\![0, m-1]\!]$ tel que $\frac{2k+1}{2n} = \frac{2h+1}{2m}$.
Avec la simplification par 2δ, on a donc :
T_n et T_m admettent une racines commune y,
si et seulement si il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$, $h \in [\![0, m-1]\!]$ tel que $\frac{2k+1}{n_1} = \frac{2h+1}{m_1}$.
Sous cette hypothèse :
$(2k+1)m_1 = (2h+1)n_1$, d'après le lemme de Gauss ($n_1 \wedge m_1 = 1$) : $m_1 | 2h+1$.
Donc il existe M tel que $(2h+1) = Mm_1$, et donc $(2k+1)m_1 = Mm_1n_1$,
puis en simplifiant par m_1 : $(2k+1) = Mn_1$ et finalement la racine commune est $\cos\left(\frac{M}{2\delta}\pi\right)$.
Or $Mm_1 = 2h+1$ est un nombre impair, donc M est nécessairement impair.
Et par ailleurs, $\frac{M}{2\delta} = \frac{2h+1}{2m} < 1$, donc $M < 2\delta$.
Finalement $\cos\left(\frac{M}{2\delta}\pi\right)$ est également racine de T_δ.

$$\boxed{T_\delta \text{ est un PGCD de } T_n \text{ et } T_m.}$$

(b) **Piste de recherche...**
Sur le même élan, montrer que deux polynômes sont premiers entre eux, c'est montrer qu'ils n'ont pas de racine en commun...

Supposons que m_1 est pair (le raisonnement est identique pour n_1 pair).
Supposons que T_n et T_m admettent une racine commune.
Avec le même raisonnement (et notations) que précédemment,
on a à nouveau $(2k+1)m_1 = (2h+1)n_1$ et donc nécessairement n_1 est également pair.
On a une contradiction car on aurait $2 | m_1 \wedge n_1 \ldots$
Donc T_n et T_m n'ont pas de racine en commun :

$$\boxed{\text{Si l'un des deux entiers } m_1 \text{ ou } n_1 \text{ est pair, alors } T_n \wedge T_m = 1.}$$

(c) Notons $n_2 = v_2(n)$, la valuation en base 2 de n et $m_2 = v_2(m)$, la valuation en base 2 de m.
— Si $n_2 \neq m_2$, alors $v_2(n \wedge m) = \min(n_2, m_2)$
et donc l'un des termes $\frac{n}{n\wedge m}$ ou $\frac{m}{n \wedge m}$ est pair.
Ainsi $T_n \wedge T_m = 1$
— Si $n_2 = m_2$, alors $v_2(n \wedge m) = n_2 = m_2$
et donc les deux termes $\frac{n}{n\wedge m}$ et $\frac{m}{n\wedge m}$ sont impairs.
Ainsi $T_n \wedge T_m = T_{n \wedge m}$

$$\boxed{\text{On peut résumer : } T_n \wedge T_m = \begin{cases} T_{n\wedge m} & \text{si } v_2(n) = v_2(m) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}}$$