

Devoir surveillé n°9
CORRECTION

Problème - Marche aléatoire et théorème de Erdős-Dvoretzky
d'après MP - Mines 2020

A. Préliminaires calculatoires

Les cinq questions de cette partie sont indépendantes et utilisées dans les parties suivantes

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part :

$$(X+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$$

D'autre part :

$$(X+1)^n \times (X+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} X^i \times \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} X^j = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i+j=k} \binom{n}{i} \binom{n}{j} X^k$$

où l'on notera que si $k > n$ et $i > n$, $\binom{n}{i} = 0$ et autres relations équivalentes...

Par unicité d'écriture de polynôme, on peut identifier pour tout $k \geq n$

/1

$$\binom{2n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n}{k-i} \quad (\text{Formule de Vandermonde})$$

et en particulier pour $k = n$

$$\boxed{\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2}$$

d'après les propriétés de symétrie du coefficient binomial.

2. On a

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad (\text{Formule de Stirling})$$

Et donc

$$(2n)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi 2n} (2n)^{2n} e^{-2n} = 2\sqrt{\pi n} 2^{2n} n^{2n} e^{-2n}$$

Puis par produit d'équivalents :

$$\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{\pi n} 2^{2n} n^{2n} e^{-2n}}{2\pi n (n^n e^{-n})^2} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

/2

$$\boxed{\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi} \sqrt{n}}}$$

3. Soit $\alpha \in]0, 1[$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante (sur $[k, k+1]$). Donc, pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

Puis en intégrant entre k et $k+1$, comme les termes de gauche et droit sont constant :

/1

$$\boxed{\frac{1}{(k+1)^\alpha} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} dt = \frac{1}{k^\alpha}}$$

(b) On a donc, en reprenant l'inégalité de droite, que l'on somme pour k de 1 à n :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

Et en reprenant l'inégalité de gauche, que l'on somme pour $k = 1$ à $n - 1$

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}$$

On additionne $1 = \frac{1}{k^\alpha}$ avec $k = 1$ de part et d'autre, on a finalement les deux inégalités : /1

$$\boxed{\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}}$$

(c) Ces intégrales se calculent ($\alpha \neq 1$) :

$$\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \int_1^n t^{-\alpha} dt = \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1} \right]_1^n = \frac{1}{1-\alpha} (n^{1-\alpha} - 1)$$

De même pour le calcul à gauche, on obtient donc :

$$\frac{1}{1-\alpha} ((n+1)^{1-\alpha} - 1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{1-\alpha} (n^{1-\alpha} - 1)$$

En divisant par notre candidat à l'équivalence :

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leq \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}} \leq 1 - \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$$

Or $1 - \alpha \in]0, 1[$, donc $n^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$. On a donc, par encadrement, une limite égale à 1 et donc /2

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$$

(d) Quel équivalent obtient-on pour $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right)_n$ si $\alpha > 1$.

4. Pour $x \in [2, +\infty[$, on pose $I(x) = \int_2^x \frac{t}{\ln(t)}$

(a) Soit $x \geq 2$, On fait une intégration par parties, en considérant $u : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ et $v : t \mapsto t$.

Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2, +\infty[$ et $u'(t) = \frac{-\frac{1}{t}}{(\ln t)^2} = \frac{-1}{t(\ln t)^2}$ et $v'(t) = 1$.

$$I(x) = \int_2^x u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_2^x - \int_2^x u'(t)v(t)dt = \left[\frac{t}{\ln t} \right]_2^x + \int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2} dt$$

/1,5

$$\boxed{\text{Pour } x \in [2, +\infty[, I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{t}{(\ln(t))^2} dt.}$$

(b) Comme

$$\frac{\frac{1}{(\ln x)^2}}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

on peut affirmer que pour $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{(\ln x)^2} = o\left(\frac{1}{\ln x}\right)$.

On a vu qu'on pouvait primitiver une relation de domination :

/1,5

$$\boxed{\int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(I(x))}$$

(c) On trouve donc $I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + o(I(x))$ et que $\frac{x}{\ln x} \rightarrow +\infty$: /1

$$\boxed{I(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}}$$

5. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de réels positifs et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

On suppose que la suite (a_n) est bornée.

(a) Soit $x \in [0, 1[$. On note $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

Alors $\alpha_{n+1} - \alpha_n = a_{n+1} x^{n+1} \geq 0$. Donc (α_n) est croissante.

On sait que (a_n) est bornée. Donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(0 \leq) a_n \leq M$.

Pour $x \in [0, 1[$ (tout est positif - produits...),

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k x^k \leq M \sum_{k=0}^n x^k = M \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \leq \frac{M}{1 - x}$$

Cette dernière majoration est indépendante de N .

Donc (α_n) est convergente (convergence monotone). /2

$$\boxed{\forall x \in [0, 1[, \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

On note, pour tout $x \in [0, 1[$, $A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k x^k$, limite également notée $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

(b) Ce coup-ci c'est x la variable. Soient $0 \leq x_1 < x_2 < 1$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_1^k < x_2^k$ et donc $a_k x_1^k < a_k x_2^k$ (car $a_k \geq 0$).

Par addition finie, puis par passage à la limite :

$$A(x_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k x_1^k \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k x_2^k = A(x_2). \quad /1$$

$$\boxed{A : x \mapsto A(x) \text{ est croissante sur } [0, 1[.}$$

On admet en fait que A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ et pour tout $h \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1]$, $A^{(h)}(x) =$

$$\sum_{k=h}^{+\infty} \frac{k!}{(k-h)!} a_k x^{k-h}.$$

(c) Définissons de même pour $x \in [0, 1[$, $B(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$, avec $b_k \geq 0$ et (b_k) bornée.

On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k = \sum_{i=0}^n a_i b_{k-i}$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0, 1[$.

D'après la formule du produit connue sur les polynômes :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^p a_k x^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^p b_k x^k \right) &= \sum_{k=0}^{2p} \left(\sum_{i+j=k} a_i \mathbf{1}_{[0,p]}(i) b_j \mathbf{1}_{[0,p]}(j) x^{i+j} \right) = \sum_{k=0}^{2p} \left(\sum_{i+j=k} a_i \mathbf{1}_{[0,p]}(i) b_j \mathbf{1}_{[0,p]}(j) \right) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{2p} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \mathbf{1}_{[0,p]}(i) \mathbf{1}_{[0,p]}(k-i) \right) x^k \end{aligned}$$

Pour $k \leq p$, pour tout $i \in [0, k]$

on a $i \leq p$, donc $\mathbf{1}_{[0,p]}(i) = 1$ et $0 \leq k-i \leq p$, donc $\mathbf{1}_{[0,p]}(k-i) = 1$:

$$\text{Ainsi } \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \mathbf{1}_{[0,p]}(i) \mathbf{1}_{[0,p]}(k-i) = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = c_k.$$

Pour $k \geq p$ (car $0 \leq \mathbf{1}_A(i) \leq 1$) :

$$0 = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} 0 \leq \underbrace{\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \mathbf{1}_{[0,p]}(i) \mathbf{1}_{[0,p]}(k-i)}_{:=S_k} \leq \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} 1 = c_k$$

Donc

$$\left(\sum_{k=0}^p a_k x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^p b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^p c_k x^k + \sum_{k=p+1}^{2p} S_k x^k$$

Ainsi pour tout $x \in [0, 1[$

/2,5

$$\sum_{k=0}^p c_k x^k \leq \left(\sum_{k=0}^p a_k x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^p b_k x^k\right) \leq \sum_{k=0}^{2p} c_k x^k$$

Comme (c_k) est une suite de réels positifs

et que $\sum_{k=0}^n c_k \leq \sum_{k=0}^n a_k \sum_{k=0}^n b_k = A_n B_n \leq AB$ (où $A = \lim(A_n)$ et $B = \lim(B_n)$).

Donc $(\sum_{k=0}^n c_k)_n$ est convergente (suite croissante majorée), on peut appliquer le passage à la limite.

Dans ce cas, les inégalités s'élargissent mais ne changent pas :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n c_k x^k \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^n b_k x^k\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{2n} c_k x^k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \leq A(x) \times B(x) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$$

/1,5

$$\forall x \in [0, 1[, \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = A(x) \times B(x)$$

6. On considère pour $\alpha \in]-1, 1[$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$.

On note $\mathcal{D}$, son domaine de définition. On admet que $[0, 1[\subset \mathcal{D}$ et que f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.

(a) On calcule simplement : pour $x \in \mathcal{D}$, $f'_\alpha(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$. Donc

/1

$$\forall x \in \mathcal{D}, (1+x)f'_\alpha(x) = \alpha f_\alpha(x).$$

(b) On peut faire une récurrence pour prouver que $\forall x \in \mathcal{D}$, $(\alpha - k)f_\alpha^k(x) = (1+x)f_\alpha^{(k+1)}(x)$.

On peut aussi exploiter la formule de Leibniz et dériver k fois le produit : $(1+x) \times f'_\alpha$.

On a donc pour tout $x \in \mathcal{D}$

$$\alpha f_\alpha^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^i}{\partial x^i} (1+x) \frac{\partial^{k-i}}{\partial x^{k-i}} f'_\alpha(x)$$

Il ne reste que les cas $i = 0$ et $i = 1$:

$$\alpha f_\alpha^{(k)}(x) = 1 \times (1+x) \times f_\alpha^{(k+1)}(x) + k \times 1 \times f_\alpha^{(k)}(x)$$

/1

$$\text{Et donc, pour tout } x \in \mathcal{D}, (\alpha - k)f_\alpha^{(k)}(x) = (1+x)f_\alpha^{(k+1)}(x).$$

(c) On a donc par télescopage $(f_\alpha^{(0)}(x) = (1+x)^\alpha)$, pour $k \geq 1$:

$$\frac{f_\alpha^{(k)}(0)}{f_\alpha^{(0)}(0)} = \prod_{h=0}^{k-1} \frac{f_\alpha^{(h+1)}(0)}{f_\alpha^{(h)}(0)} = \prod_{h=0}^{k-1} \frac{(\alpha - h)}{1+x}$$

$$f_\alpha^{(k)}(0) = \frac{(1+x)^\alpha}{(1+x)^k} \prod_{h=0}^{k-1} (\alpha - h)$$

Donc avec $x = 0$:

/1

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*, f_\alpha^{(k)}(0) = \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i).$$

Et pour tout $x \in [0, 1[$, comme $\alpha < 1$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $k - \alpha > 0$
et donc par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^{k-\alpha}}$ sur $[0, 1[$

$$\frac{1}{2^{\alpha-k}} \leq (1+x)^{\alpha-k} \leq 1$$

/1

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, 1[$, $|f_\alpha^{(k)}(x)| \leq \prod_{i=0}^{k-1} |\alpha - i|$.

- (d) La formule de Taylor avec reste intégrale, à l'ordre n , pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ est

/1

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Soit $x \in]-1, 1[$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puisque f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$) et d'après la formule trouvée à la question précédente :

/1

$$f_\alpha(x) = f_\alpha(0) + \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f_\alpha^{(n+1)}(t) dt$$

- (e) Soit $x \in [0, 1[$, fixé. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $t \in [0, x]$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f_\alpha^{(n+1)}(t) dt \right| &\leq \int_0^x \frac{|(x-t)^n|}{n!} |f_\alpha^{(n+1)}(t)| dt \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \prod_{i=0}^n |\alpha - i| dt \\ &\leq \prod_{i=0}^n |\alpha - i| \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x = \frac{\prod_{i=0}^n |\alpha - i|}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n+1} |i - \alpha - 1| \\ &\leq x^{n+1} \left(1 - \frac{\alpha-1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{\alpha-1}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{\alpha-1}{2} \right) \left| 1 - \frac{\alpha-1}{1} \right| \leq x^{n+1} \end{aligned}$$

Or la suite $(x^n) \rightarrow 0$ car $x \in [0, 1[$. Donc

/2,5

$$\forall x \in [0, 1[, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)}{k!} x^k := 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)}{k!} x^k \right)$$

- (f) En prenant alors $X = -x$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$, on trouve

- $f_\alpha : X \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+X}}$, donc $f_\alpha(X) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$
- $\prod_{h=0}^{n-1} (\alpha - h) = \prod_{h=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - h \right)$

$$\begin{aligned} \prod_{h=0}^{n-1} (\alpha - h) &= \prod_{h=0}^{n-1} \frac{2h+1}{2} = \frac{(-1)^n}{2^n} \prod_{h=0}^{n-1} (2h+1) \times \prod_{h=1}^n \frac{2h}{2h} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{\prod_{j=1}^{2n} j}{2^n \prod_{h=1}^n h} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n 2^n n!} \end{aligned}$$

On trouve donc

/2,5

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n n! n!} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$$

B. Cas $d = 1$

Dans cette partie, d est égal à 1 et on note donc simplement $0_d = 0$.

Par ailleurs, $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$ et la loi de X est donnée par

$$\mathbf{P}(X = 1) = p \text{ et } \mathbf{P}(X = -1) = q$$

1. On cherche à évaluer $\mathbf{P}(S_n = 0)$

- (a) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n : \omega \mapsto S_n(\omega) \% 2$ (reste dans la division euclidienne par 2). On fixe n . Pour tout $k \leq n$, et tout $\omega \in \Omega$, $X_k(\omega) \in \{-1, 1\}$, donc $X_k(\omega) \equiv 1[2]$. Par addition :

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega, S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega) \equiv \sum_{k=1}^n 1 = n[2] \quad /2$$

Donc Z_n est une variable aléatoire certaine : $\mathbf{P}(Z_n = 1) = 1$ si n impair et $\mathbf{P}(Z_n = 0) = 1$ si n pair.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbf{P}(S_{2n+1} = 0) = 1 - \mathbf{P}(Z_{2n+1} = 1) = 1 - 1 = 0$

- (b) $\frac{X_n+1}{2}(\omega) = \{\frac{1+1}{2}, \frac{-1+1}{2}\} = \{1, 0\}$.
Donc $\frac{X_n+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(X_n + 1 = 2) = \mathbf{P}(X_n = 1) = p$. Par coalition les variables $(\frac{X_k+1}{2})$ sont indépendantes et l'addition donne une binomiale : /1

$$\sum_{k=1}^n \frac{X_k + 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n X_k + n \right) = T_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

On a alors

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \mathbf{P}(T_{2n} = \frac{2n}{2}) = \mathbf{P}(T_{2n} = n) = \binom{2n}{n} p^n q^n \quad /1,5$$

2. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n , l'événement « $S_{2n} = 0$ », puis $Y_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}$.

- (a) $[Y_n = r]$ est l'événement, entre les instant 0 et $2n$, la marche est repassé r fois par la case initiale. /1

Y_n indique combien de fois la marche est passée en 0 entre $t = 0$ et $t = 2n$

- (b) $\mathbf{1}_{A_k}$ est une variable indicatrice,
elle suit donc une loi de Bernoulli, de paramètre $\mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} (pq)^k$. /1

$$\mathbf{1}_{A_k} \hookrightarrow \mathcal{B} \left(\binom{2k}{k} (pq)^k \right)$$

- (c) Le produit des variables indicatrices $\mathbf{1}_{A_k} \times \mathbf{1}_{A_{k+1}}$ est également une indicatrice :

$$\mathbf{1}_{A_k} \times \mathbf{1}_{A_{k+1}}(\omega) = 1 \iff \omega \in A_k \cap A_{k+1} \iff \mathbf{1}_{A_k \cap A_{k+1}}(\omega) = 1$$

Donc, comme pour toute loi de Bernoulli, d'espérance égale à son paramètre :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_k} \times \mathbf{1}_{A_{k+1}}) &= \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_k \cap A_{k+1}}) = \mathbf{P}(A_k \cap A_{k+1}) = \mathbf{P}(A_k) \times \mathbf{P}(A_{k+1}) \\ &= \mathbf{P}(A_k) \times \mathbf{P}(X_{2k+1} + X_{2k+2} = 0) \\ &= \mathbf{P}(A_k) \times \mathbf{P}((X_{2k+1} = 1 \cap X_{2k+2} = 0) \cup (X_{2k+1} = 0 \cap X_{2k+2} = 1)) \\ &= \mathbf{P}(A_k) \times (\mathbf{P}(X_{2k+1} = 1 \cap X_{2k+2} = 0) + \mathbf{P}(X_{2k+1} = 0 \cap X_{2k+2} = 1)) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= \mathbf{P}(A_k) \times (\mathbf{P}(X_{2k+1} = 1)\mathbf{P}(X_{2k+2} = 0) + \mathbf{P}(X_{2k+1} = 0)\mathbf{P}(X_{2k+2} = 1)) \quad \text{par indépendance} \\ &= \binom{2k}{k} (pq)^k (pq + qp) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(\mathbf{1}_{A_k}, \mathbf{1}_{A_{k+1}}) &= \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_k} \mathbf{1}_{A_{k+1}}) - \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_k})\mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_{k+1}}) \\ &= 2 \binom{2k}{k} (pq)^{k+1} - \binom{2k}{k} (pq)^k \binom{2k+2}{k+1} (pq)^{k+1} \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{Cov}(\mathbf{1}_{A_k}, \mathbf{1}_{A_{k+1}}) = \binom{2k}{k} (pq)^{k+1} \left(2 - \binom{2k+2}{k+1} (pq)^k \right)$. /2,5

Les variables $(\mathbf{1}_{A_k})_n$ sont-elles mutuellement indépendantes.

/0,5

Remarques !

On démontrerait de même pour $i < j$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_i} \mathbf{1}_{A_j}) = \mathbf{P}(A_i) \times \mathbf{P}_{A_i}(A_j) = \mathbf{P}(A_i) \mathbf{P}(A_{j-i}) = \binom{2i}{i} \binom{2(j-i)}{j-i} (pq)^j$$

$$\text{Cov}(\mathbf{1}_{A_i}, \mathbf{1}_{A_j}) = \binom{2i}{i} (pq)^j \left(\binom{2(j-i)}{j-i} - \binom{2j}{j} (pq)^i \right)$$

(d) Par linéarité de l'espérance :

/1

$$\mathbf{E}(Y_n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_k}) = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} (pq)^k$$

(e) Or on sait que pour $x \in]-1, 1[$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $pq < \frac{1}{4}$ (par étude de $p \mapsto p(1-p)$ sur $[0, 1]$, maximale en $p = \frac{1}{2}$)
et donc $x = 4pq \in [0, 1[$. Donc

/2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(Y_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{4pq}{4}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{1-4pq}}$$

C. Marches aléatoires, récurrence

Dans cette partie d est quelconque.

On considère les fonctions F et G définies par les formules

$$\forall x \in]-1, 1[, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0_d) x^n$$

$$\forall x \in]-1, 1[, G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(R = n) x^n$$

1. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\mathbf{P}(R = n))$ et $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

La suite (u_n) est une suite de réels positifs, bornée par 1.

On peut appliquer les résultats de la première question :

/1

$$G \text{ est donc parfaitement définies et de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [0, 1[.$$

On note, de même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (\mathbf{P}(S_n = 0))$ et $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

La suite (v_n) est une suite de réels positifs, bornée par 1.

On peut appliquer les résultats de la première question :

/1

$$F \text{ est donc parfaitement définies et de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [0, 1[.$$

2. On remarque (même si cela ne sert pas ici) que $U_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(R = k) = \mathbf{P}(R \leq n)$.

Par σ -additivité, comme $\Omega = (R = +\infty) \uplus (\uplus_{n \in \mathbb{N}} (R = n))$:

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(R = +\infty) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(R = k) = \mathbf{P}(R = +\infty) + G(1)$$

/1,5

$$G(1) = 1 - \mathbf{P}(R = +\infty) = \mathbf{P}(R \neq +\infty)$$

3. Soient k et n sont des entiers naturels tels que $k \leq n$,

$$\mathbf{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \mathbf{P}(R = k) \times \mathbf{P}_{[R=k]}(S_n = 0_d)$$

Puis

$$\mathbf{P}_{[R=k]}(S_n = 0_d) = \mathbf{P}_{[R=k]}(X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_n = 0) = \mathbf{P}(X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_n = 0)$$

Par lemme de coalition et indépendances de $(X_1, \dots, X_k)$ et $(X_{k+1}, \dots, X_n)$.

Puis toutes les variables (X_i) sont indépendantes et suivent la même loi X . Donc

$$\mathbf{P}(X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_n = 0) = \mathbf{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_{n-k} = 0) = \mathbf{P}(S_{n-k} = 0)$$

Donc $\mathbf{P}_{[R=k]}(S_n = 0_d) = \mathbf{P}(S_{n-k} = 0)$.

Ainsi :

$$\boxed{\mathbf{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \mathbf{P}(R = k) \mathbf{P}(S_{n-k} = 0_d)}$$

/2,5

Puis comme R est une variable aléatoire à valeur de $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$,

on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) + \mathbf{P}((S_n = 0) \cap (R = +\infty))$$

Or pour $k > n$, il est impossible d'avoir $R = k$ et $S_n = 0$ (sinon $R < n$).

/1,5

$$\boxed{\mathbf{P}(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(R = k) \mathbf{P}(S_{n-k} = 0_d)}$$

4. Soit $x \in [0, 1[$, on peut appliquer la formule vue en question 1 (on rappelle $\mathbf{P}(R = 0) = 0$) :

$$\begin{aligned} G(x) \times F(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^k u_i v_{k-i} \right) x^k = \mathbf{P}(R = 0) \mathbf{P}(S_0 = 0) x^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{P}(R = i) \mathbf{P}(S_{k-i} = 0) \right) x^k \\ &= 0 + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = 0) x^k = F(x) - 1 \end{aligned}$$

/2

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], F(x) = 1 + F(x)G(x)}$$

On a donc $[1 - G(x)]F(x) = 1$, ou encore :

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{1 - G(x)}}$$

Si $\mathbf{P}(R \neq +\infty) (= G(1)) \neq 1$, alors la fonction de droite admet une limite en 1 ;

$$\text{celle de gauche, égale sur } [0, 1[\text{ également } F(1) = \frac{1}{1 - \mathbf{P}(R \neq +\infty)} = \frac{1}{\mathbf{P}(R = +\infty)}.$$

En revanche, si $\mathbf{P}(R \neq +\infty) (= G(1)) = 1$, alors

$$F \text{ n'admet une limite infinie en } 1 : F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - \mathbf{P}(R \neq +\infty)} = +\infty$$

/1,5

$$\boxed{F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \begin{cases} +\infty & \text{si } \mathbf{P}(R \neq +\infty) = 1 \\ \frac{1}{\mathbf{P}(R = +\infty)} & \text{si } \mathbf{P}(R \neq +\infty) < 1 \end{cases}}$$

5. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit Z_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement

$$(S_i \notin \{S_k, 0 \leq k \leq i-1\})$$

(a) On a l'équivalence des événements :

$$[Z_i = 1] \iff S_i \notin \{S_0, S_1, \dots, S_{i-1}\}$$

Les événements contraire :

$$\begin{aligned} [Z_i = 0] &\iff S_i \in \{S_0, S_1, \dots, S_{i-1}\} \iff \exists k \in [0, i-1] \text{ tel que } S_i = S_k \\ &\quad \exists k \in [0, i-1] \text{ tel que } X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_i = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z_i = 0) &= \mathbf{P}(\exists k \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket \mid X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_i = 0) = \mathbf{P}(\exists k \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket \mid S_{i-k} = 0) \\ &= \mathbf{P}(\exists h \in \llbracket 1, i \rrbracket \mid S_h = 0) = \mathbf{P}(R \leq i)\end{aligned}$$

En passant aux événements contraires,

/2

$$\boxed{\mathbf{P}(Z_i = 1) = \mathbf{P}(R > i)}$$

(b) $N_n = \text{card}(S_k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket)$.

$N_n(\Omega) = \llbracket 2, n \rrbracket$ (Pire des situations, tous différents. Meilleure des situations : on revient toujours sur les deux mêmes positions). Il s'agit d'une variable aléatoire finie.

Pour calculer N_n , on additionne 1 exactement à chaque fois qu'un nouvel élément S_i n'est pas dans l'ensemble $\{S_0, \dots, S_{i-1}\}$, c'est-à-dire exactement lorsque $Z_i = 1$. Donc

$$N_n = \sum_{i=0}^n Z_i$$

Par linéarité de l'espérance, puis comme les Z_i suivent des lois de Bernoulli :

$$\mathbf{E}(N_n) = \sum_{i=0}^n \mathbf{E}(Z_i) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}(Z_i = 1) = \mathbf{P}(Z_0 = 1) + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(R > i)$$

/2

$$\boxed{\mathbf{E}(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(R > i)}$$

(c) On a donc

$$\frac{\mathbf{E}(N_n)}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(R > i)$$

Notons $u_n = \mathbf{P}(R > n)$, alors $u_n = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=n}^{+\infty} R = j\right) \rightarrow \mathbf{P}(R > +\infty)$, par continuité de $\mathbf{P}$ sur les suites décroissantes d'événements.

On peut appliquer le théorème de Cesàro : $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_n\right) \rightarrow \lim(u_n) = \mathbf{P}(R > +\infty)$.

Puis comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, par addition des limites :

/1

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{E}(N_n)}{n} = \mathbf{P}(R = +\infty)}$$

6. Soit pour tout $x \in [0, 1[$, $H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(R > k)x^k$.

Comme $(\mathbf{P}(R > k))_k$ est une suite positive bornée, $H(x)$ est bien défini sur $[0, 1[$.

Puis, pour tout $x \in [0, 1[$, (on applique vue plus haut, mais il n'y a que de deux termes pour la somme de gauche)

/1,5

$$\begin{aligned}(1-x)H(x) &= \mathbf{P}(X > 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} (1\mathbf{P}(R > k) + (-1)\mathbf{P}(R > k-1))x^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\mathbf{P}(R > k) - \mathbf{P}(R > k-1))x^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\mathbf{P}(R > k) - (\mathbf{P}(R = k) + \mathbf{P}(X > k)))x^k = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)x^k = 1 - G(x)\end{aligned}$$

Puis, on sait que $F(x) = \frac{1}{1-G(x)}$, donc $F(x)(1-x)H(x) = 1$, donc $F(x)H(x) = \frac{1}{1-x} =$

$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$. Or

$$F(x)H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^k \mathbf{P}(S_i = 0) \mathbf{P}(R > k-i) \right) x^k$$

Par unicité de l'écriture de cette forme, on peut identifier :

/1,5

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=0}^k \mathbf{P}(S_i = 0) \mathbf{P}(R > k-i) = 1}$$

Résultat vrai même si $k = 0$.

Remarques !

Pour montrer l'unicité, on procède comme avec les polynômes.

Si $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, de classe C^∞ sur $[0, 1]$, alors $\forall h \in \mathbb{N}$, $f^{(h)}(x) = \sum_{k=h}^{+\infty} \frac{k!}{(k-h)!} a_k x^{k-h}$.

Et donc $f^{(h)}(0) = h! a_h$, donc $a_h = \frac{f^{(h)}(0)}{h!}$.

Puis si $f(x)$, s'écrit également $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$, on a $a_h = \frac{f^{(h)}(0)}{h!} = b_h$. L'écriture est unique (car nécessaire).

D. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$: un théorème d'Erdős et Dvoretzky

1. (a) On a vu $\mathbf{P}(S_k = 0) = \mathbf{1}_{2\mathbb{N}}(k) \binom{k}{k/2} (pq)^{k/2}$.

Donc, si $n = 2m$ ou $n = 2m + 1$ ($k = 2h$) et pour x tel que $x^2 pq < \frac{1}{4}$:

$$\sum_{k=0}^n \mathbf{P}(S_k = 0) x^k = \sum_{h=0}^m \binom{2h}{h} (pq)^h x^{2h} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - 4pqx^2}}$$

Or $pq = p(1-p) = p - p^2 \leq \frac{1}{4}$ (c'est l'étude de $p \mapsto p - p^2$ maximale en $p = \frac{1}{2}$).

Donc pour tout $x \in [0, 1]$, on a bien $x^2 pq < \frac{1}{4}$.

/2

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = 0) x^k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(S_k = 0) x^k = \frac{1}{\sqrt{1 - 4pqx^2}}$

Puis, nous savons que $F(x) = \frac{1}{1 - G(x)}$, donc

/1

$\forall x \in [0, 1], \quad G(x) = 1 - \frac{1}{F(x)} = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$

- (b) On a vu que $G(1) = \mathbf{P}(R \neq +\infty)$. Or

$$G(1) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)} = 1 - \sqrt{1 - 4p + 4p^2} = 1 - \sqrt{(1-2p)^2} = 1 - |1-2p|$$

Donc (comme $1 = p + q$) :

/1,5

$\mathbf{P}(R = +\infty) = 1 - G(1) = |1-2p| = |q-p| = |p-q|$

- (c) On exploite la formule donnée en fin de partie A

$$1 - \sqrt{1-x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(n+1)} x^{n+1}$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(n+1)} (4pqx^2)^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\binom{2n}{n}}{n+1} (pq)^{n+1} x^{2(n+1)}$$

On a vu qu'on peut identifier le développement en fin de partie C.

/2,5

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(R = 2n) = \frac{2\binom{2n-2}{n-1}}{n} (pq)^n \quad \mathbf{P}(R = 2n-1) = 0$

- (d) VOIR CORRECTION DM13

2. Dans les questions suivantes, on suppose que $d = 2$ et que la loi de X est donnée par

$$\mathbf{P}(X = (0, 1)) = \mathbf{P}(X = (0, -1)) = \mathbf{P}(X = (1, 0)) = \mathbf{P}(X = (-1, 0)) = \frac{1}{4}$$

- (a) On aura besoin pour l'étude ici de considérer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires

$$Y_k = X_k[1] \quad Z_k = X_k[2]$$

respectivement première et seconde coordonnées de X_k (non encore définies!).

Ainsi, $Y_k(\Omega) = \{-1, 0, 1\} = Z_k(\Omega)$, et

$$\mathbf{P}(Y_k = -1) = \mathbf{P}(X_k = (-1, 0)) = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(Y_k = 1) \quad \mathbf{P}(Y_k = 0) = \mathbf{P}(X_k = (0, -1)) + \mathbf{P}(X_k = (0, 1)) = \frac{1}{2}$$

De même pour Z_n .
On a alors

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} X_k = \left(\sum_{k=1}^{2n} Y_k, \sum_{k=1}^{2n} Z_k \right)$$

Et donc $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{2n} Y_k = 0, \sum_{k=1}^{2n} Z_k = 0\right)$.

Mais

C'est variables aléatoires ne sont pas indépendantes, clairement.

Considérons deux autres variables aléatoires dont la donnée est équivalente : $A_k = Y_k + Z_k$ et $B_k = Y_k - Z_k$.

— Si $X_k = (-1, 0)$, alors $A_k = -1$ et $B_k = -1$

— Si $X_k = (1, 0)$, alors $A_k = 1$ et $B_k = 1$

— Si $X_k = (0, -1)$, alors $A_k = -1$ et $B_k = 1$

— Si $X_k = (0, 1)$, alors $A_k = 1$ et $B_k = -1$

$A_k(\Omega) = B_k(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbf{P}(A_k = 1) = \mathbf{P}(A_k = -1) = \mathbf{P}(B_k = 1) = \mathbf{P}(B_k = -1) = \frac{1}{2}$.

Enfin, (A_k, B_k) sont indépendantes

$$\text{car } \forall \epsilon, \epsilon' \in \{-1, 1\}, \mathbf{P}(A_k = \epsilon, B_k = \epsilon') = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(A_k = \epsilon)\mathbf{P}(B_k = \epsilon').$$

Puis comme $(X_i)_i$ est une famille de variables indépendantes,

il en est de même des $(A_i, B_i)_i$ (on pourrait le montrer par récurrence).

Enfin, on a $Y_k = \frac{1}{2}(A_k + B_k)$ et $Z_k = \frac{1}{2}(A_k - B_k)$.

Il y a équivalence : $\left[\sum_{k=1}^m Y_k = 0 \cap \sum_{k=1}^m Z_k = 0\right] \iff \sum_{k=1}^m A_k = 0 \cap \sum_{k=1}^m B_k = 0$.

Reprenons (avec le lemme des coalitions : indépendance des sommes) :

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{2n} A_k = 0, \sum_{k=1}^{2n} B_k = 0\right) = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{2n} A_k = 0\right) \times \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{2n} B_k = 0\right)$$

Le calcul $\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{2n} A_k = 0\right)$ est le même que celui fait en B.1.(b) avec $p = q = \frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{2n} A_k = 0\right) = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{2n} A_k = 0\right) = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \quad /4$$

$$\boxed{\mathbf{P}(S_{2n} = 0_2) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2}$$

On sait que $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$, donc /1

$$\boxed{\mathbf{P}(S_{2n} = 0_2) \sim \frac{1}{\pi n}}$$

(b) VOIR CORRECTION DM13

(c) VOIR CORRECTION DM13