Devoir à la maison n°13

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Ce devoir complète et démontre une série de résultats exploités dans le DS 9.

Exercice 1

On considère $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

1. (Cours) Donner une condition nécessaire et suffisante à l'affirmation : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
2. Lorsque $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge, en exploitant une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de la suite des sommes partielles.
3. Lorsque $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge, en exploitant une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de la suite des restes.

Exercice 2

Soit (a_n) une suite positive, bornée. On note $A : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, définie sur $[0,1[$ (au moins).

1. Soit $x \in [0,1[$. Soit $X = \frac{x+1}{2}$. Donc $x < X < 1$. Montrer que $\left(na_n \left(\frac{x}{X}\right)^{n-1}\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

   En déduire que $B : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} ka_k x^{k-1}$ est bien définie, puis que B est bornée sur $[0,1[$.

   On a démontré dans le DS9, qu'une application comme B est croissante sur $[0,1[$.
2. Soit $x_1 < x_2 \in [0,1[$.
   (a) Montrer que $A(x_2) - A(x_1) = (x_2 - x_1)\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \left(\sum_{h=0}^{k-1} x_1^h x_2^{k-h-1}\right)$
   (b) En déduire $(x_2 - x_1)B(x_1) \leqslant A(x_2) - A(x_1) \leqslant (x_2 - x_1)B(x_2)$.
   (c) En déduire que A est continue sur $[0,1[$.
   (d) Montrer que A est dérivable sur $[0,1[$ et que pour tout $x \in [0,1[$, $A'(x) = B(x)$.
3. Montrer que A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$, puis que $\forall\, h \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0,1[$.
$$A^{(h)}(x) = \sum_{k=h}^{+\infty} \frac{k!}{(k-h)!} a_k x^{k-h}$$
4. En déduire que si pour tout $x \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ (série convergente),

   alors nécessairement $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_k$

Exercice 3

On suppose que $a_n \sim b_n$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$.

1. Montrer que si $\sum a_n$ converge alors $\sum b_n$ converge.
   Montrer que si $\sum a_n$ diverge alors $\sum b_n$ diverge.
2. On suppose que $\sum a_n$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} a_n$.
3. On suppose que $\sum a_n$ diverge. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} a_n$.
4. On suppose $u_n \to \ell > 0$.

   En exploitant la question précédente, montrer que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \longrightarrow \ell$ (Théorème de Césàro).

Exercice 4

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbf{P}(X = n)$.
On associe à X la fonction (appelée série génératrice) $G_x : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$ (au moins) d'après les questions précédentes.

1. On généralise le théorème de transfert : $\forall\ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbf{E}(h(X)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) h(n)$.
   Quel lien entre G_X et $t \mapsto \mathbf{E}(t^X)$?
2. Montrer que si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$ (sur $[0, 1[$).
3. Que peut-on dire de $G_X(1)$, de $G'_X(1)$?
4. Calculer G_X si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. En déduire la série génératrice d'une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p, n)$
5. (*) Soient N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toute une loi même loi X.
   Soit $S : \omega \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$ alors $S(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Montrer que
   $$G_S = G_N \circ G_X$$

Problème

On reprend dans ce problème, les notations et problèmatiques du DS 9.
Rappelons qu'il s'agit de calculer de $\mathbf{E}(N_n)$ dans le cas $d = 1$ et $d = 2$ (cas particulier).

1. (Reprise de la question D.1.(d).). On suppose ici que $p = q = \frac{1}{2}$ et $d = 1$.
   (a) On rappelle que dans le cas général $\mathbf{P}(R = m) = \dfrac{2\binom{m-2}{m/2-1}}{m}(pq)^{m/2}\mathbf{1}_{2\mathbb{N}}(m)$. Donner un équivalent de $\mathbf{P}(R = 2n)$ pour $n \to +\infty$, puis de $\mathbf{P}(R > i)$, pour $i \to +\infty$.
   (b) On rappelle que $\mathbf{E}(N_n) = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(R > i)$.
   Montrer que $\mathbf{E}(N_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}}$.
2. Reprise de la question D.2.(b). et D.2.(c). On suppose $d = 2$
   (a) Résultat asymptotique préliminaire.
   Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de termes positifs. On suppose que $(a_n)_{n\in\,\mathbb{N}}$ est décroissante et que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 1$$
   On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$
   i. Soient m et n deux entiers naturels tels que $m > n$. Montrer que
   $$a_n \leqslant \frac{1}{B_n} \quad \text{et} \quad 1 \leqslant a_n B_{m-n} + a_0(B_m - B_{m-n})$$
   ii. On suppose dans cette question qu'il existe $(m_n)_{n\in\,\mathbb{N}}$ vérifiant $m_n > n$ pour n assez grand et $B_{m_n-n} \sim_{n\to+\infty} B_n$ et $B_{m_n} - B_{m_n-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Montrer que
   $$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{B_n}$$
   iii. On suppose dans cette question qu'il existe $C > 0$ tel que $b_n \sim_{n\to+\infty} \frac{C}{n}$.
   En utilisant la question précédente pour une suite $(m_n)_{n\in\,\mathbb{N}}$ bien choisie, montrer que
   $$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{C\ln(n)}$$
   (b) On rappelle que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(S_k = 0_d)\mathbf{P}(R > n - k)$.
   Montrer que $\mathbf{E}(N_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi n}{\ln n}$.
   On pourra exploiter le résultat obtenu en A.4. du DS9