Devoir surveillé n°9

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Problème - Marche aléatoire et théorème de Erdös-Dvoretzky

Dans tout le texte, d est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note 0_d le d-uplet dont toutes les coordonnées valent 0, c'est à dire le vecteur nul de $\mathbb{R}^d$.

On considère :

- une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$,
- $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de X et définies sur un même espace probabilisé.
- une suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0_d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

  On dit que *la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire de pas X, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$*.
- R la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par

$$R = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0_d\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0_d\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

  Autrement dit, R est égal à $+\infty$ si la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne revient jamais en 0_d, ou bien est égal au premier instant auquel cette marche aléatoire revient en 0_d sinon.
- pour $n \in \mathbb{N}$, N_n le cardinal du sous-ensemble $\{S_k,\ k \in \{0,\dots,n\}\}$ de $\mathbb{Z}^d$.
  Le nombre N_n est donc le nombre de points distincts de $\mathbb{Z}^d$ visités par la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ après n pas.

Les propriétés de $\mathbf{P}$ définie sur l'ensemble des parties de Ω sont identiques dans les cas finis et cas dénombrables.
Ainsi, dans tous les cas, $\mathbf{P}(\Omega) = 1$; $\mathbf{P} \geqslant 0$ et on a la propriété de la σ-additivité :
Si $(A_i)_{i\in I}$ est une suite d'événements incompatibles (2 à 2), alors $\mathbf{P}\left(\biguplus_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} A_i$.
On peut aussi être amené à appliquer la formule des probabilités totales avec un système complet d'événements, dénombrable.

Le but du problème est d'étudier asymptotiquement l'espérance $\mathbf{E}(N_n)$ de la variable aléatoire N_n.

Dans la première partie, nous établirons des résultats analytiques qui serviront pour la suite.
La seconde partie se réduit au cas $d = 1$.
La troisième partie permet d'établir des résultats par récurrence sur des variables aléatoires discrètes.
La dernière partie donne le résultat annoncé : le théorème d'Erdös et Dvoretzky pour $d = 2$.

Plusieurs résultats sont admisedans ce DS. Ils seront démontrés dans le DM13.

A. Préliminaires calculatoires

Les six questions de cette partie sont indépendantes et utilisées dans les parties suivantes. Les réponses aux questions 2. et 3. sont exploitées en D.1.(d). Celle de 4. est exploitée en D.2.(b).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la factorisation
$$(X+1)^{2n} = (X+1)^n (X+1)^n$$
montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$
2. Rappeler la formule de Stirling, puis montrer que
$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$$
3. Soit $\alpha \in]0,1[$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$
   (b) En déduire que
$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$
   (c) Conclure par
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$
4. Pour $x \in [2,+\infty[$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$
   (a) Justifier, pour $x \in [2,+\infty[$, la relation
$$I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2}$$
   (b) Etablir par ailleurs la relation
$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} \underset{x\to+\infty}{=} o(I(x))$$
   (c) En déduire finalement un équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de *réels positifs* et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

   On suppose que *la suite* (a_n) *est bornée.*
   (a) Soit $x \in [0,1[$. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

   On note, pour tout $x \in [0,1[$, $A(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, limite également notée $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.
   (b) Montrer que $A : x \mapsto A(x)$ est croissante sur $[0,1[$.
   On admet en fait que A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$
   et pour tout $h \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0,1[$, $A^{(h)}(x) = \displaystyle\sum_{k=h}^{+\infty} \frac{k!}{(k-h)!} a_k x^{k-h}$.
   (c) Définissons de même pour $x \in [0,1[$, $B(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$, avec $b_k \geqslant 0$ et $(b_k)_n$ bornée.

   On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i b_{k-i}$ Soit $p \in \mathbb{N}$.
   Montrer que pour tout $x \in [0,1[$
$$\sum_{k=0}^{p} c_k x^k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{p} a_k x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{p} b_k x^k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{2p} c_k x^k$$
   Conclure que $\forall\, x \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = A(x) \times B(x)$

6. On considère pour $\alpha \in]-1,1[$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$.
On note $\mathcal{D}$, son domaine de définition. On admet que $[0,1[\subset \mathcal{D}$ et que f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $(1+x)f'_\alpha(x) = \alpha f_\alpha(x)$.
   (b) Puis que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $(\alpha - k)f_\alpha^{(k)}(x) = (1+x)f_\alpha^{(k+1)}(x)$
   (c) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$f^{(k)}(0) = \prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i) \text{ et pour } x \in [0,1[,\ |f_\alpha^{(k)}(x)| \leqslant \left|\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)\right|.$$
   (d) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre n. On donnera bien les hypothèses vérifiées par f.
   Appliquée alors à f_α cette formule en $a = 0$ et $b = x \in [0,1[$.
   (e) En déduire, pour $x \in [0,1[$ l'expression de $(1+x)^\alpha$ sous forme de limite d'une somme (infinie).
   (f) En prenant alors $\alpha = -\frac{1}{2}$, justifier alors la formule :
   $$\forall\, x \in\ [0,1[\,,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$$
   On admet également que
   $$\forall\, x \in [0,1[\,,\ 1 - \sqrt{1-x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(n+1)} x^{n+1}$$

B. Cas $d = 1$

Dans cette partie, d est égal à 1 et on note donc simplement $0_d = 0$.
Par ailleurs, $p \in]0,1[\,$, $q = 1 - p$ et la loi de X est donnée par
$$\mathbf{P}(X = 1) = p \ \text{ et } \ \mathbf{P}(X = -1) = q$$

1. On cherche à évaluer $\mathbf{P}(S_n = 0)$
   (a) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n : \omega \mapsto S_n(\omega)\%2$ (reste dans la division euclidienne par 2).
   Montrer que Z_n est une variable aléatoire certaine.
   En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbf{P}(S_{2n+1} = 0)$.
   (b) Reconnaitre la loi de la variable aléatoire $T_n = \dfrac{S_n + n}{2}$.
   Justifier alors, pour $n \in \mathbb{N}$,
   $$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}(pq)^n$$
2. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n, l'événement « $S_{2n} = 0$ », puis $Y_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$.
   (a) Que représente la variable aléatoire Y_n ?
   (b) Quel est la loi de $\mathbf{1}_{A_k}$.
   (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{Cov}(\mathbf{1}_{A_k}, \mathbf{1}_{A_{k+1}})$. Les variables $(\mathbf{1}_{A_k})_n$ sont-elles mutuellement indépendantes ?
   (d) Calculer $\mathbf{E}(Y_n)$, sous forme d'une somme.
   (e) En déduire $\lim(\mathbf{E}(Y_n))$ si $p \neq \frac{1}{2}$, en exploitant A.6.

C. Marches aléatoires, récurrence

On considère les fonctions F et G définies par les formules
$$\forall x \in\ [0,1[\,, \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0_d)x^n \quad \text{et} \quad G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(R = n)x^n$$

1. En exploitant la question A.5., montrer que les fonctions F et G sont bien définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$.
2. Quelle relation entre $G(1)$ et $\mathbf{P}(R \neq +\infty)$?

3. Si k et n sont des entiers naturels tels que $k \leqslant n$, montrer que

$$\mathbf{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \mathbf{P}(R = k)\mathbf{P}(S_{n-k} = 0_d)$$

En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(R = k)\mathbf{P}(S_{n-k} = 0_d)$$

4. Montrer que

$$\forall x \in\ [0,1[\,,\ F(x) = 1 + F(x)G(x)$$

Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x \to 1^-$, en discutant selon la valeur de $\mathbf{P}(R \neq +\infty)$.

5. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit Z_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement

$$(S_i \notin \{S_k,\ 0 \leqslant k \leqslant i-1\})$$

(a) En raisonnant sur les événements contraires, montrer que, pour $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \mathbf{P}(R > i)$$

(b) En déduire que, pour $n \in\ \mathbb{N}^*$: $\mathbf{E}(N_n) = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(R > i)$

(c) Conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbf{E}(N_n)}{n} = \mathbf{P}(R = +\infty)$$

On pourra admettre et utiliser le théorème de Cesàro : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite réelle convergeant vers le nombre réel ℓ, alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$

6. Soit pour tout $x \in [0,1[$, $H(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(R > k)x^k$. Evaluer $(1-x)H(x)$.

En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(S_k = 0_d)\mathbf{P}(R > n-k)$$

On admettra que si $\forall\, x \in [0,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_k$.

D. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Z}^2$: un théorème d'Erdös et Dvorestsky

Dans cette partie, nous reprenons le cas particulier $d = 1$ (questions 1) puis nous étudions un cas avec $d = 2$ (questions 2).

1. On considère $d = 1$ et on reprend les notations des deux parties précédentes.
On rappelle que $\mathbf{P}(S_k = 0) = \mathbf{1}_{2\mathbb{N}}(k)\binom{k}{k/2}(pq)^{k/2}$

(a) Donner les valeurs de $F(x)$ et $G(x)$ (on attend une évaluation de la somme infinie).

(b) Exprimer $\mathbf{P}(R = +\infty)$ en fonction de $|p - q|$.

(c) Déterminer alors la loi de R

(d) Question réservée pour le DM 13 : On suppose de plus que $p = q = \frac{1}{2}$
Donner un équivalent simple de $\mathbf{P}(R = 2n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
En déduire un équivalent simple de $\mathbf{E}(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Dans les questions suivantes, on suppose que $d = 2$ et que la loi de X est donnée par

$$\mathbf{P}(X = (0,1)) = \mathbf{P}(X = (0,-1)) = \mathbf{P}(X = (1,0)) = \mathbf{P}(X = (-1,0)) = \frac{1}{4}$$

(a) (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Etablir l'égalité

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0_2) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \right)^2$$

Donner un équivalent de $\mathbf{P}(S_{2n} = 0)$

(b) Question réservée pour le DM 13 : Donner un équivalent de $\mathbf{P}(R = n)$.

(c) Question réservée pour le DM 13 : Donner un équivalent simple de $\mathbf{E}(N_n)$