Devoir à la maison n°12
CORRECTION

Somme de Riemann

On note pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right)$

1. Soit $f: x\mapsto x\sin x$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note également $a=0$ et $b=2\pi$.
   On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, (le terme est nul pour $k=0$) :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right)=\frac{1}{4\pi^2}\times\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k\pi}{n}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=\frac{1}{4\pi^2}\times\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$$

On reconnait une somme de Riemann régulière (somme des rectangles à droites).

$$\boxed{\text{Ainsi la suite } (S_n) \text{ est convergente}}$$

Et, en faisant une intégration par parties :

$$\lim(S_n)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}x\sin(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4\pi^2}\left([-x\cos x]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos(x)\mathrm{d}x\right)=\frac{-1}{2\pi}+0$$

$$\boxed{S=\lim(S_n)=-\frac{1}{2\pi}}$$

Piste de recherche...
Nous avons une méthode, vue en cours, qui donne l'équivalent ici en fonction de $f(b)-f(a)=2\pi\sin(2\pi)-0\sin 0=0$.
Il faut donc anticiper et aller plus loin dans l'approximation donnée...Par ailleurs, nous proposons une autre démonstration qu'en exploitant une formule de Taylor-Lagrange, il faut alors aller un rang plus loin.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$. On note F une primitive de f.
On fixe $n\in\mathbb{N}$ et on note pour tout $k\leqslant n$, $x_k=2\pi\dfrac{k}{n}$.
On a vu que $S=\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(t)\mathrm{d}t$ et $S_n=\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})f(x_k)$.
On a alors

$$4\pi^2(S_n-S)=\sum_{k=1}^{n}\left((x_k-x_{k-1})f(x_k)-\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(t)\mathrm{d}t-\right)=\sum_{k=1}^{n}\Big((x_k-x_{k-1})f(x_k)-F(x_k)+F(x_{k-1})\Big)$$

La formule de Taylor-Lagrange appliquée en x_k à F (dont $F'=f$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ donne

$$\left|F(x_{k-1})-\left(F(x_k)+(x_{k-1}-x_k)F'(x_k)+\frac{(x_{k-1}-x_k)^2}{2}F''(x_k)+\frac{(x_{k-1}-x_k)^3}{6}F'''(x_k)\right)\right|\leqslant\frac{|x_{k-1}-x_k|^4}{4!}\sup_{[x_{k-1},x_k]}|F^{(4)}|$$

Or $x_k-x_{k-1}=\dfrac{2\pi}{n}$, $F^{(k)}(x_k)=f^{(k-1)}(x_k)$,
par continuité de $F^{(4)}$ sur $[0,2\pi]$, il existe $M=\sup_{[0,2\pi]}|f^{(3)}|$ (Théorème de Weierstrass) :

$$\left|\underbrace{\Big((x_k-x_{k-1})f(x_k)-F(x_k)+F(x_{k-1})\Big)-\left(\frac{\pi}{n}(x_k-x_{k-1})f'(x_k)-\frac{2\pi^2}{3n^2}(x_k-x_{k-1})f''(x_k)\right)}_{=u_{k,n}}\right|\leqslant\frac{M\pi^4}{24n^4}$$

Notons alors $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f'(x_k)$, alors $(T_n) \to \displaystyle\int_0^{2\pi} f'(t)\mathrm{d}t = f(2\pi) - f(0) = 0$

et $R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f''(x_k)$, alors $(R_n) \to \displaystyle\int_0^{2\pi} f''(t)\mathrm{d}t = f'(2\pi) - f'(0) = \cdots = 2\pi$.

Par inégalité triangulaire :

$$\left|4\pi^2(S_n - S) - \frac{\pi}{n}T_n + \frac{2\pi^2}{3n^2}R_n\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|u_{k,n}| \leqslant \frac{M\pi^4}{24}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^4} = \frac{M\pi^4}{24n^3}$$

On divise par $\dfrac{-4\pi^3}{3n^2}$:

$$\left|\frac{4\pi^2(S_n - S) - \frac{\pi}{n}T_n}{\frac{-4\pi^3}{3n^2}} - \frac{R_n}{-2\pi}\right| \leqslant \frac{3M\pi}{96n^3}$$

La limite de $(\frac{3M\pi}{96n^3})$ est nulle, celle de R_n est 2π, donc $\dfrac{4\pi^2(S_n - S) - \frac{\pi}{n}T_n}{\frac{-4\pi^3}{3n^2}}$ converge vers 1.

Ainsi $4\pi^2(S_n - S) - \frac{\pi}{n}T_n \sim \frac{-4\pi^3}{3n^2}$, ou en multipliant par n^2 : $4\pi^2 n^2(S_n - S) - \pi n T_n \to \dfrac{-4}{3}\pi^3(*)$.

Mais on ne peut encore rien dire, il faut aussi contrôler la convergence de (T_n) vers 0, plus exactement la limite de (nT_n). On applique la même méthode mais à un degré moindre :

$$\begin{aligned}
\left|T_n - \tfrac{\pi}{n}R_n\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f'(x_k) - (f(x_k) - f(x_{k-1}) - \frac{1}{2}(x_k - x_{k-1})^2 f''(x_k)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|(x_k - x_{k-1})f'(x_k) - (f(x_k) - f(x_{k-1}) - \frac{1}{2}(x_k - x_{k-1})^2 f''(x_k)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{8\pi^3 M}{6n^3} = \frac{4\pi^3 M}{3n^2}
\end{aligned}$$

Donc, de même, $\left|\dfrac{nT_n}{\pi R_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{4\pi^2 M}{3n} \to 0$, donc $nT_n \sim \pi R_n \to 2\pi^2$.

Ainsi, associé au résultat $(*)$, par addition de limite :

$$4\pi^2 n^2(S_n - S) \longrightarrow 2\pi\pi^2 - \frac{4}{3}\pi^3 = \frac{2}{3}\pi^3$$

$$\boxed{(S_n - S)_n \sim \frac{\pi}{6n^2}}$$

Remarques !

Evidemment, on aurait pu exploiter la même méthode qu'en cours, avec l'ordre suivant. Cela donne

On considère $\psi : t \mapsto F(t) - F(x_{k-1}) + (x_{k-1} - t)F'(t) + \frac{1}{2}(x_{k-1} - t)^2 F''(t) - \frac{M}{6}(x_{k-1} - t)^3$

tel $\psi(x_k) = 0$, *ce qui est possible avec* $M = 6\dfrac{F(x_k) - F(x_{k-1}) + (x_{k-1} - x_k)F'(t) + \frac{1}{2}(x_{k-1} - x_k)^2 F''(x_k)}{(x_{k-1} - x_k)^3}$.

On a alors : $\psi(x_k) = \psi(x_{k-1}) = 0$.

Donc il existe $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ *tel que* $\psi'(c_k) = 0$ *(Rolle).*

Or $\psi'(t) = \frac{1}{2}(x_{k-1} - t)^2 F'''(t) + \dfrac{M}{2}(x_{k-1} - t)^2$.

Donc puisque $\psi'(c_k) = 0$, *alors* $M = -F'''(c_k)$.

Ainsi : $\psi(x_k) = 0 = F(x_k) - F(x_{k-1}) + (x_{k-1} - x_k)F'(x_k) + \frac{1}{2}(x_{k-1} - x_k)^2 F''(x_k) + \dfrac{(x_{k-1} - x_k)^3}{6}F^{(3)}(c_k)$.

Ainsi :

$$(4\pi^2)(S_n - S) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f'(x_k) - \frac{2\pi^2}{3n^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f^{(2)}(c_k)$$

Mais, il faut là aussi appliquer la méthode pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f'(x_k)$ *qui tend vers* $f(2\pi) - f(0) = 0$.

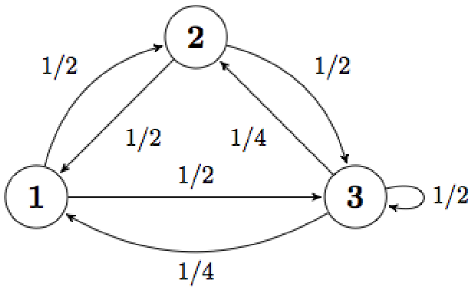
$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f'(x_k) - 0 \sim \frac{2\pi}{2n} \times (f'(2\pi) - f'(0)) = \frac{2\pi^2}{n}$$

$$4\pi^2 n^2(S_n - S) \longrightarrow 2\pi^3 - \frac{2\pi^2}{3} \times (f'(2\pi) - f'(0)) = 2\pi^3 - \frac{4\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^3$$

$$S_n - S \sim \frac{\pi}{6n^2}$$

Problème - Marche aléatoire

A. Marches aléatoires sur un graphe fini sans absorption



Graphe G_1

On étudie dans cette question quelques propriétés de la marche aléatoire sur le graphe G_1.

1. X_n est une variable aléatoire, avec $X_n(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
   Donc $([X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3])$ forme un système complet d'événements.
   On peut appliquer la formule des probabilités totales (trois fois) à $X_{n+1} = i$:

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = i) = \mathbf{P}(X_n = 1) \times \mathbf{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = i) + \mathbf{P}(X_n = 2) \times \mathbf{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = i) + \mathbf{P}(X_n = 3) \times \mathbf{P}_{X_n=3}(X_{n+1} = i)$$

   Les probabilités conditionnelles sont données par le graphe G_1, on a donc

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbf{P}(X_n = 1) \times 0 + \mathbf{P}(X_n = 2) \times \frac{1}{2} + \mathbf{P}(X_n = 3) \times \frac{1}{4} \\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 2) = \mathbf{P}(X_n = 1) \times \frac{1}{2} + \mathbf{P}(X_n = 2) \times 0 + \mathbf{P}(X_n = 3) \times \frac{1}{4} \\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 3) = \mathbf{P}(X_n = 1) \times \frac{1}{2} + \mathbf{P}(X_n = 2) \times \frac{1}{2} + \mathbf{P}(X_n = 3) \times \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Et donc avec

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ on a } Y_{n+1} = A \times Y_n}$$

Remarques !

Cette matrice A est qualifiée de matrice stochastique car $\forall\, j \in \mathbb{N}_3$, $\sum_{i=1}^{3} {}_i[A]^j = 1$.
Ce résultat est nécessaire dans ce contexte, car il s'agit d'une somme de probabilité pour des événements formant un système complet. Dans ce genre de problème (très fréquent), on pourra être attentif à ce genre de remarque. Certains sujets se concentrent même directement à étudier ce genre de matrice (cela donne le théorème de Perron-Fröbenius)

2. Il faut faire la récurrence. Il ne s'agit pas d'une suite géométrique car ce n'est pas une suite numérique.
   Posons $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $Y_n = A^n Y_0$ »
   — $A^0 = I$ (identité), on a donc $\mathcal{P}_0$ vraie.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
     Alors $Y_{n+1} = AY_n = A \times A^n Y_0 = A^{n+1} Y_0$
     Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\boxed{\text{On a démontré par récurrence : pour tout } n \text{ entier naturel, } Y_n = A^n Y_0}$$

3. La dernière équation donne $\mathbf{P}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}(\mathbf{P}(X_n = 1) + \mathbf{P}(X_n = 2) + \mathbf{P}(X_n = 3))$.
   Or on a vu que $([X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3])$ forme un système complet d'événements, donc $\mathbf{P}(X_n = 1) + \mathbf{P}(X_n = 2) + \mathbf{P}(X_n = 3) = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \geqslant 1,\ \mathbf{P}(X_n = 3) = \frac{1}{2}.}$$

4. (a) Les calculs donnent :

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ puis } A^2(2A-I) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A}$$

Ainsi : $2A^3 - A^2 = A$, et donc

$$\boxed{A^3 = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A}$$

(b) Il s'agit de montrer que pour tout entier n non nul, A^n appartient à vect(A^2, A).
Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}_n$: « $\exists\ u_n, v_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = u_nA^2 + v_nA$ »

— C'est vrai pour $\mathcal{Q}_1$ (et $\mathcal{Q}_2$ également) avec $u_1 = 0$ et $v_1 = 1$: $A = 0A^2 + 1A$

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathcal{Q}_n$ est vraie.

$$A^{n+1} = A \times A^n = A(u_nA^2 + v_nA) = u_nA^3 + v_nA^2 = (\tfrac{1}{2}u_n + v_n)A^2 + (\tfrac{1}{2}u_n)A.$$

Et donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est également vrai.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ entier naturel non nul, il existe } u_n, v_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } A^n = u_nA^2 + v_nA}$$

(c) La question précédente nous permet d'affirmer que

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n \quad +v_n \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

On trouve donc

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \text{ non nul } u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n}$$

(d) On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
L'équation caractéristique est $2x^2 - x - 1 = 0$, de racine $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$.
Donc il existe A et B réels tels que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = A1^n + B(-\frac{1}{2})^n$.
En outre $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$ (car $A^2 = 1A^2 + 0A$),
on a donc $A - \frac{1}{2}B = 0$ et $A + \frac{1}{4}B = 1$, donc $A = \frac{2}{3}$ et $B = \frac{4}{3}$ Par conséquent :

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \text{ non nul } u_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \times (-\frac{1}{2})^n \text{ et } v_n = \frac{1}{2}u_{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times (-\frac{1}{2})^{n-1}}$$

Remarques !

L'équation caractéristique trouvée est la même que le polynôme caractéristique de A.
A étant stochastique, on démontre que 1 est nécessairement une valeur propre (racine du polynôme), les autres sont de module nécessairement strictement inférieur à 1. Autrement écrit : 1 est toujours racine évidente.

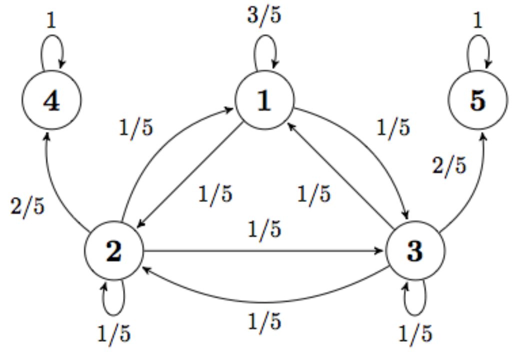
5. On a alors $Y_n = A^nY_0 = \left(\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \times (-\frac{1}{2})^n\right) A^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times (-\frac{1}{2})^{n-1}\right) A\right) Y_0$.

Or par hypothèse : $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Seule la première colonne de A^n nous intéresse.

On trouve donc

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{P}(X_n = 1) = \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \times (-\frac{1}{2})^n\right)\frac{3}{8} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times (-\frac{1}{2})^{n-1}\right) 0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2})^n \\ \mathbf{P}(X_n = 2) = \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \times (-\frac{1}{2})^n\right)\frac{1}{8} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times (-\frac{1}{2})^{n-1}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2})^n \\ \mathbf{P}(X_n = 3) = \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \times (-\frac{1}{2})^n\right)\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times (-\frac{1}{2})^{n-1}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}}$$

B. Marches aléatoires sur un graphe fini avec absorption



Graphe G_2

1. Pour tout couple d'entiers $(i,j) \in (\mathbb{N}_5)^2$, on note $a_{i,j}$ la probabilité que $\mathcal{A}_2$ soit absorbée en j sachant que $X_0 = 1$.
   (a) Puisque 4 et 5 sont absorbants, on a nécessairement

$$\boxed{a_{4,4} = a_{5,5} = 1 \text{ et } a_{4,5} = a_{5,4} = 0}$$

   (b) Notons Y la variable aléatoire qui indique le numéro d'absorption de la particule.
   On cherche donc $a_{i,4} = \mathbf{P}_{X_0=i}(Y=4)$ pour $i \in \{1,2,3\}$.
   Or $([X_1=1],[X_1=2],[X_1=3],[X_1=4],[X_1=5])$ est un système complet d'événements.
   On peut appliquer la formule des probabilités totales à la probabilité $\mathbf{P}_{X_0=i}$

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{5} \mathbf{P}_{X_0=i}(X_1=k) \times \mathbf{P}_{(X_0=i)\cap(X_1=k)}(Y=4)$$

   Ce qui d'après le graphe donne (et en prenant : $(a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,4}, a_{4,4}, a_{5,4} = (x,y,z,1,0))$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lllllll} x & = & \frac{3}{5}x & +\frac{1}{5}y & +\frac{1}{5}z & +0\times 1+ & 0\times 0 & = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z \\ y & = & \frac{1}{5}x & +\frac{1}{5}y & +\frac{1}{5}z & +\frac{2}{5}\times 1+ & 0\times 0 & = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z + \frac{2}{5} \\ z & = & \frac{1}{5}x & +\frac{1}{5}y & +\frac{1}{5}z & +0\times 1+ & \frac{2}{5}\times 0 & = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z \end{array}\right.}$$

   (c) On a donc les systèmes équivalents

$$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} \frac{-2}{5}x & +\frac{1}{5}y & +\frac{1}{5}z & =0 \\ \frac{1}{5}x & -\frac{4}{5}y & +\frac{1}{5}z & =-\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5}x & +\frac{1}{5}y & -\frac{4}{5}z & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} -2x & +y & +z & =0 \\ x & -4y & +z & =-2 \\ x & +y & -4z & =0 \end{array}\right.$$

   Faisons $L_3 \leftrightarrow L_1$ puis $L_2 \leftarrow \frac{1}{5}(L_2 - L_1), L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ et enfin $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$

$$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & +y & -4z & =0 \\ x & -4y & +z & =-2 \\ -2x & +y & +z & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & +y & -4z & =0 \\ & -y & +z & =-\frac{2}{5} \\ & +3y & -7z & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & +y & -4z & =0 \\ & -y & +z & =-\frac{2}{5} \\ & & -4z & =-\frac{6}{5} \end{array}\right.$$

   Il ne reste plus qu'à remonter le système :

$$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} z & = \frac{3}{10} \\ y & = \frac{2}{5} + z = \frac{7}{10} \\ x & = -y + 4z = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

   On remarque que le graphe est symétrique entre 4 et 5 à condition d'intervertir 2 et 3.
   On a donc

$$\boxed{a_{1,4} = a_{1,5} = \frac{1}{2},\ a_{2,4} = a_{3,5} = \frac{7}{10} \text{ et } a_{3,4} = a_{2,5} = \frac{3}{10}}$$

   (d) Notons Abs_i l'événement : « la particule est absorbée en 4 ou 5, sachant qu'elle part de i ».
   On a alors $\mathbf{P}(Abs_i) = (a_{i,4} + a_{i,5})$.
   Or on a $\mathbf{P}(Abs_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $\mathbf{P}(Abs_2) = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = 1$, $\mathbf{P}(Abs_3) = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} = 1$,
   $\mathbf{P}(Abs_1) = 1 + 0 = 1$ et $\mathbf{P}(Abs_1) = 0 + 1 = 1$.
   Donc,

$$\boxed{\text{quel que soit le départ, la probabilité que } \mathcal{A}_2 \text{ soit absorbée (en 4 ou en 5) est égale à 1}}$$

(e) On cherche $\mathbf{P}_{Y=4}(X_0=3)$. D'après la formule de Bayes :

$$\mathbf{P}_{Y=4}(X_0=3)=\frac{\mathbf{P}_{X_0=3}(Y=4)\times\mathbf{P}(X_0=3)}{\mathbf{P}(Y=4)}=\frac{\mathbf{P}_{X_0=3}(Y=4)\times\mathbf{P}(X_0=3)}{\sum\limits_{i=1}^{5}\mathbf{P}_{X_0=i}(Y=4)\mathbf{P}(X_0=i)}$$

Puis comme X_0 est uniforme sur $\mathbb{N}_3$, on a $\mathbf{P}(X_0=1)=\mathbf{P}(X_0=2)=\mathbf{P}(X_0=3)=\frac{1}{3}$,

$$\mathbf{P}_{Y=4}(X_0=3)=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\frac{1}{3}+\frac{7}{10}\frac{1}{3}+\frac{3}{10}\frac{1}{3}}=\frac{1}{5}$$

Donc,

$$\boxed{\text{sachant que } \mathcal{A}_2 \text{ est absorbée en 4 et } X_0 \text{ uniforme, la probabilité qu'elle soit partie de 3 vaut } \frac{1}{5}}$$

2. (a) Partant de 1, on ne peut pas être absorbée donc $\mathbf{P}(T_1=1)=0$.
Comme en question 1.(b), on exploite le système complet d'événements $[X_1=i]$:

$$\mathbf{P}(T_1=k+1)=\mathbf{P}_{X_0=1}(T_1=k+1)=\sum_{i=1}^{5}\mathbf{P}_{X_0=1}(X_1=i)\times\mathbf{P}_{(X_0=1)\cap(X_1=i)}(T_1=k+1).$$

Or $\mathbf{P}_{(X_0=1)\cap(X_1=i)}(T_1=k+1)=\mathbf{P}(T_i=k)$:

c'est comme si la particule démarrait de i et était absorbé en k coups.

On a donc

$$\boxed{\mathbf{P}(T_1=1)=0\quad\text{et }\forall\, k\geqslant 1\quad \mathbf{P}(T_1=k+1)=\frac{3}{5}\mathbf{P}(T_1=k)+\frac{1}{5}\mathbf{P}(T_2=k)+\frac{1}{5}\mathbf{P}(T_3=k)}$$

(b) On peut ensuite calculer $\mathbf{E}(T_1)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k\mathbf{P}(T_1=k)=\mathbf{P}(T_1=1)+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(k+1)\mathbf{P}(T_1=k+1)$

$$\mathbf{E}(T_1)=0+\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)\left(\frac{3}{5}\mathbf{P}(T_1=k)+\frac{1}{5}\mathbf{P}(T_2=k)+\frac{1}{5}\mathbf{P}(T_3=k)\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{3}{5}\mathbf{P}(T_1=k)+\frac{1}{5}\mathbf{P}(T_2=k)+\frac{1}{5}\mathbf{P}(T_3=k)\right)+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\mathbf{P}(T_1=k)+\frac{1}{5}\mathbf{P}(T_2=k)+\frac{1}{5}\mathbf{P}(T_3=k)\right)$$

$$\boxed{\mathbf{E}(T_1)=\frac{3}{5}\mathbf{E}(T_1)+\frac{1}{5}\mathbf{E}(T_2)+\frac{1}{5}\mathbf{E}(T_3)+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=1+\frac{3}{5}\mathbf{E}(T_1)+\frac{1}{5}\mathbf{E}(T_2)+\frac{1}{5}\mathbf{E}(T_3)}$$

(la somme des probabilités vaut 1)

(c) De même, on a

$$\boxed{\mathbf{P}(T_2=1)=\frac{2}{5}\quad\text{et }\forall\, k\geqslant 1\quad \mathbf{P}(T_2=k+1)=\frac{1}{5}\mathbf{P}(T_1=k)+\frac{1}{5}\mathbf{P}(T_2=k)+\frac{1}{5}\mathbf{P}(T_3=k)}$$

$$\boxed{\mathbf{P}(T_3=1)=\frac{2}{5}\quad\text{et }\forall\, k\geqslant 1\quad \mathbf{P}(T_3=k+1)=\frac{1}{5}\mathbf{P}(T_1=k)+\frac{1}{5}\mathbf{P}(T_2=k)+\frac{1}{5}\mathbf{P}(T_3=k)}$$

Puis $\mathbf{E}(T_2)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k\mathbf{P}(T_2=k)=\mathbf{P}(T_2=1)+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(k+1)\mathbf{P}(T_1=k+1)$ et

$$\boxed{\mathbf{E}(T_2)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\mathbf{E}(T_1)+\frac{1}{5}\mathbf{E}(T_2)+\frac{1}{5}\mathbf{E}(T_3)+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=1+\frac{1}{5}\mathbf{E}(T_1)+\frac{1}{5}\mathbf{E}(T_2)+\frac{1}{5}\mathbf{E}(T_3)=\mathbf{E}(T_3)}$$

Par conséquent,

$$\boxed{(x,y,z)=(\mathbf{E}(T_1),\mathbf{E}(T_2),\mathbf{E}(T_3))\text{ est solution du système }\left\{\begin{array}{lllll}\frac{3}{5}x & +\frac{1}{5}y & +\frac{1}{5}z & +1 & =x\\ \frac{1}{5}x & +\frac{1}{5}y & +\frac{1}{5}z & +1 & =y\\ \frac{1}{5}x & +\frac{1}{5}y & +\frac{1}{5}z & +1 & =z\end{array}\right.}$$

(d) La résolution du système donne (on peut prendre les mêmes opérations élémentaires que pour 1.(c)) :

$$\boxed{(\mathbf{E}(T_1),\mathbf{E}(T_2),\mathbf{E}(T_3))=\left(\frac{25}{4},\frac{15}{4},\frac{15}{4}\right)}$$