On a précédemment montré que si A est un arbre représentant une expression arithmétique, et $(s_0, \dots, s_{n-1})$ la suite de ses étiquettes dans l'ordre préfixe, alors :

- $(s_0, \dots, s_{n-1})$ contient exactement $\frac{n+1}{2}$ entiers et $\frac{n-1}{2}$ opérateurs. (question 2a)
- $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $(s_0, \dots, s_{k-1})$ contient au moins autant d'opérateurs que d'entiers.

Nous voulons maintenant montrer qu'il est impossible qu'un autre arbre A' représentant une expression arithmétique ait la même suite d'étiquettes dans l'ordre préfixe. Ceci montrera que la suite d'étiquettes suffit à caractériser l'expression arithmétique, et donc qu'on peut écrire une expression arithmétique en ordre préfixe sans les parenthèses.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $A \neq A'$ deux arbres représentant des expressions arithmétiques, de même suite d'étiquettes dans l'ordre préfixe $(s_0, \dots, s_{n-1})$. On suppose, sans perte de généralité, que A et A' sont choisis de manière à minimiser leur nombre n de feuilles + nœuds internes.

Si $n = 1$, alors A et A' sont réduits à une feuille d'étiquette s_0, donc sont égaux.

On peut donc supposer $n \geqslant 1$. Alors $A = \texttt{NI}(A_g, s_0, A_d)$ et $A' = \texttt{NI}(A'_g, s_0, A'_d)$. En particulier, $A'_g \neq A_g$ ou (inclusif) $A'_d \neq A_d$.

Soit $m \in [\![1; n-2]\!]$ tel que la suite des étiquettes de A_g dans l'ordre préfixe est $(s_1, \dots, s_m)$. On définit de même m' par rapport à A'_g.

Si $m = m'$, A_g et $A'g$ ont la même suite d'étiquettes dans l'ordre préfixe, de longueur $m < n$, donc par minimalité de n $A_g = A'_g$. Mais si $m' = m$, la suite d'étiquettes de A_d dans l'ordre préfixe est aussi celle de A'_d : $(s_{m+1}, \dots, s_{n-1}) = (s_{m'+1}, \dots, s_{n-1})$. La longueur de cette suite étant $n - m - 1 < n$, on a de même $A_d = A'_d$, ce qui contredit l'hypothèse.

On a donc $m \neq m'$, on peut supposer sans perte de généralité $m < m'$.

Alors $(s_1, \dots, s_m)$ est un préfixe strict de $(s_1, \dots, s_{m'})$ (la suite des étiquettes dans l'ordre préfixe de A'_g), donc d'après la question 2b, cette suite contient au moins autant d'opérateurs que d'entier.

Mais $(s_1, \dots, s_m)$ est aussi la suite des étiquettes dans l'ordre préfixe de A_g, donc d'après la question 2a, contient exactement $\dfrac{m+1}{2}$ entiers et $\dfrac{m-1}{2}$ opérateurs.

On a donc une contradiction : il est impossible qu'il existe deux arbres représentants des expressions arithmétiques différentes qui ont la même suite d'étiquettes dans l'ordre préfixe.