

DS 7 de mathématiques

Durée : 4h.

- Les calculatrices et autres technologies sont interdites.
- Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et à la rigueur du raisonnement. La copie doit être lisible, les pages numérotées, les calculs suffisamment détaillés, les résultats mis en valeur...
- Les trois problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.
- Si vous repérez une possible erreur d'énoncé, vous êtes invité(e) à venir le signaler.

1 Exercice – Changement de base

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3, soit $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On considère l'endomorphisme f de E , dont la matrice dans la base $\mathbf{e}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. On considère la famille $\mathbf{e}' = (e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_3, e_1 - e_2)$.
Exprimer $f(e'_k)$ en fonction de e'_1, e'_2, e'_3 pour tout $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.
2. En déduire que $\mathbf{e}'$ est une base de E et exprimer la matrice B de f dans cette base.
3. On note P la matrice de passage de $\mathbf{e}$ vers $\mathbf{e}'$. Calculer P et P^{-1} .
4. Déterminer l'expression de A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Problème – Groupe de Heisenberg discret

On étudie l'ensemble $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, constitué des matrices $M(x, y, z)$ définies par

$$M(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{pmatrix}, \text{ pour tous } x, y, z \in \mathbb{Z}.$$

On note $X = M(1, 0, 0)$, $Y = M(0, 1, 0)$ et $Z = M(0, 0, 1)$.

2.1 Calculs matriciels

1. Calculer X^k , pour tout $k \in \mathbb{Z}$; puis donner sans justification les valeurs de Y^k et Z^k , pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
2. Calculer $X^k Y^\ell Z^m$ pour tous $k, \ell, m \in \mathbb{Z}$. En déduire que tout élément de $\mathcal{H}$ s'écrit $X^k Y^\ell Z^m$ pour un unique triplet $(k, \ell, m) \in \mathbb{Z}^3$.
3. Soient $(k, \ell, m), (k', \ell', m') \in \mathbb{Z}^3$. Déterminer $(k'', \ell'', m'') \in \mathbb{Z}^3$ tel que

$$X^k Y^\ell Z^m X^{k'} Y^{\ell'} Z^{m'} = X^{k''} Y^{\ell''} Z^{m''}.$$

4. En déduire que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\text{GL}_3(\mathbb{R})$.
5. Montrer que $\mathcal{H} = \langle X, Y \rangle$.
6. Déterminer le centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{H}$, défini comme $\mathcal{Z} = \{M \in \mathcal{H} \mid \forall N \in \mathcal{H}, MN = NM\}$.

2.2 Hauteurs des éléments de $\mathcal{H}$

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble $\{X, Y, Z, X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}\}$.

Si M est un élément de $\mathcal{H}$, on définit sa hauteur $|M|$ comme l'entier n minimal tel que

$$\exists U_1, \dots, U_n \in \mathcal{A} : M = U_1 U_2 \dots U_n.$$

On convient que $|I_3| = 0$.

7. Soient $M, N \in \mathcal{H}$. Montrer que $|M| = |M^{-1}|$ et que $|MN| \leq |M| + |N|$. Justifier qu'il n'y a pas égalité en général.

La fin du problème est significativement plus difficile.

8. Montrer que, pour tous $k, \ell, m \in \mathbb{Z}$, $|X^k Y^\ell Z^m| \leq |k| + |\ell| + 6\sqrt{|m|}$.

9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la propriété suivante :

$$\left(\forall k, \ell, m \in \mathbb{Z}, |X^k Y^\ell Z^m| = n \right) \implies \left(|k| + |\ell| \leq n \text{ et } |m| \leq n^2 \right).$$

10. En déduire que, pour tous $k, \ell, m \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2}(|k| + |\ell| + \sqrt{|m|}) \leq |X^k Y^\ell Z^m|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $B(n)$ le nombre d'éléments M de $\mathcal{H}$ tels que $|M| \leq n$.

11. Montrer qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq N, C_1 n^4 \leq B(n) \leq C_2 n^4.$$

3 Problème – Sous-espaces de matrices non inversibles

Soit $n \geq 2$ un entier, soit $\mathbb{K}$ un corps. On étudie dans ce problème les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont toutes les matrices sont non inversibles ou – plus généralement – dont toutes les matrices sont de rang inférieur à $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

- Dans la première partie, on propose une démonstration différente de celle donnée en classe du fait qu'un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient toujours une matrice inversible.
- Dans la deuxième partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on montre qu'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont de rang inférieur ou égal à r est de dimension au plus nr .
- Dans la troisième et dernière partie, on étudie le cas d'égalité pour $r = n-1$ dans la partie précédente.

3.1 Matrice inversible dans un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On souhaite montrer que H contient une matrice inversible. On raisonne par l'absurde en supposant que $H \cap \text{GL}_n(\mathbb{K}) = \emptyset$.

1. Montrer que $\text{Vect}(I_n)$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $I_n + N$ est inversible et préciser son inverse.
3. En déduire que H contient toutes les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Aboutir à une contradiction et conclure.

3.2 Sous-espaces de matrices de rang $\leq r$

On suppose désormais que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont de rang inférieur ou égal à r .

On suppose dans un premier temps que F contient la matrice $J_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, écrite par blocs

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On introduit l'ensemble E des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, s'écrivant par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix}, \text{ où } A \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{R}).$$

5. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.
6. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix}$ dans $E \cap F$.
 - (a) Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $M + tJ_r$ est équivalente à la matrice N_t suivante écrite par blocs

$$N_t = \begin{pmatrix} tI_r & 0 \\ 0 & A - \frac{B^T B}{t} \end{pmatrix}.$$

(b) En déduire que A et $B^T B$ sont nulles.

(c) En déduire que $M = 0$.

7. Montrer que $\dim F \leq nr$.

8. Montrer que la conclusion demeure quand on ne suppose plus que J_r appartient à F .

3.3 Sous-espaces de dimension maximale sans matrice inversible

On cherche à décrire l'ensemble $\mathcal{A}$ des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n-1)$, ne contenant aucune matrice inversible.

9. Soit D une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^n$. On note $K_D = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid D \subset \text{Ker } M\}$; on admet que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $K_D \in \mathcal{A}$.

On montrerait de même que si H est un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^n$, le sous-espace vectoriel $I_H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Im } M \subset H\}$ est aussi dans $\mathcal{A}$.

Soit $F \in \mathcal{A}$. On suppose dans un premier temps que $J_{n-1} \in F$.

10. Montrer que, pour tout M dans F et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\text{Ker}(M + tJ_{n-1}) \neq \{0\}$.

On écrit les matrices $M \in F$ par blocs, sous la forme $M = \begin{pmatrix} A_M & C_M \\ L_M & \alpha_M \end{pmatrix}$, où $A_M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, $C_M \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, $L_M \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $\alpha_M \in \mathbb{R}$.

11. Soit $M \in F$. On cherche à montrer que $\alpha_M = 0$.

(a) On raisonne par l'absurde en supposant que $\alpha_M \neq 0$.

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut trouver $X_t \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $A_M X_t + tX_t - \frac{C_M L_M}{\alpha_M} X_t = 0$.

(b) Aboutir à une contradiction.

12. On cherche maintenant à montrer que $L_M C_M = 0$. On suppose $C_M \neq 0$.

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, on note $\|X\| = \sup_{i \in \llbracket 1, \dots, n-1 \rrbracket} |x_{i,1}|$.

(a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $X_t \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X_t\| = 1$ et $\lambda_t \in \mathbb{R}$ tels que

$$A_M X_t + tX_t + \lambda_t C_M = 0 \text{ et } L_M X_t = 0.$$

(b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_t \neq 0$, $L_M C_M + \frac{L_M A_M X_t}{\lambda_t} = 0$.

(c) Montrer que $|\lambda_t| \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ et conclure.

13. On considère l'application linéaire $\phi : F \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto \begin{pmatrix} 0 & C_M \\ L_M & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $\text{Im } \phi$ ne contient aucune matrice N non nulle telle que $L_N = C_N^T$.

(b) En déduire que $\text{rg } \phi \leq n - 1$.

- (c) En déduire que $\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) \right\} \subset F$.
14. Soit $A \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$. On note $A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F' = A'F = \{A'M, M \in F\}$.
- (a) Montrer que $F' \in \mathcal{A}$ et que $J_{n-1} \in F'$.
- (b) En déduire que, pour tout $M \in F$, $L_M A C_M = 0$.
15. Montrer que pour tout $M \in F$, on a $C_M = 0$ ou $L_M = 0$.
16. Montrer qu'on a l'alternative suivante :
- Ou bien $C_M = 0$, pour tout $M \in F$.
 - Ou bien $L_M = 0$, pour tout $M \in F$.
- Décrire F dans chacun des deux cas.
17. **Cas général.** On considère $F \in \mathcal{A}$ mais on ne suppose plus que $J_{n-1} \in F$.
- (a) Montrer que F contient une matrice de rang $n - 1$.
- (b) Conclure, en décrivant l'ensemble $\mathcal{A}$.