

DS 7 de mathématiques – Corrigé

1 Exercice – Changement de base

1. Dans la base $\mathbf{e}$, les vecteurs de $\mathbf{e}'$ sont représentés respectivement par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On calcule :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = 2e'_2$ et $f(e'_3) = 3e'_3$.

2. Par la question précédente, les vecteurs de $\mathbf{e}'$ sont des vecteurs propres de f pour des valeurs propres deux à deux distinctes. La famille $\mathbf{e}'$ est donc libre. Comme elle est de cardinal 3 et que E est de dimension 3, c'est une base de E .

Par la question précédente, on a $B = \text{Mat}_{\mathbf{e}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Par définition,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule P^{-1} par exemple par l'algorithme de Gauss-Jordan. Après calculs (*à faire sur la copie !*), on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Par formule de changement de base, on sait que $B = P^{-1}AP$. Donc, $A = PBP^{-1}$ et, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$.

Comme B est diagonale, ses puissances se calculent immédiatement. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 0 & -3^n \\ -1 & -2^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2^n+3^n & 1-2^n & 1-2^{n+1}+3^n \\ 1-3^n & 1 & 1-3^n \\ -1+2^n & -1+2^n & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2 Problème – Groupe de Heisenberg discret

On étudie l'ensemble $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, constitué des matrices $M(x, y, z)$ définies par

$$M(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{pmatrix}, \text{ pour tous } x, y, z \in \mathbb{Z}.$$

On note $X = M(1, 0, 0)$, $Y = M(0, 1, 0)$ et $Z = M(0, 0, 1)$.

2.1 Calculs matriciels

1. On peut écrire $X = I_3 + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on constate que $N^2 = 0$. Comme I_3 et N commutent, on a par binôme de Newton :

$$\forall k \in \mathbb{N}, X^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} N^i I_3^{k-i} = I_3 + kN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, X est une matrice inversible car elle est triangulaire inférieure avec des coefficients diagonaux non nuls. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'inverse de X^k est donné par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par calcul direct, de sorte que la formule trouvée ci-dessus est valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On trouve de même $Y^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$ et $Z^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

2. Soient $k, \ell, m \in \mathbb{Z}$. Avec les formules trouvées à la question précédente, on a

$$X^k Y^\ell Z^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & \ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ m & \ell & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tous $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $M(x, y, z) = X^k Y^\ell Z^m \iff (x, y, z) = (k, \ell, m)$. D'où l'existence et l'unicité de la représentation d'un élément de $\mathcal{H}$ sous la forme $X^k Y^\ell Z^m$.

3. On calcule :

$$X^k Y^\ell Z^m X^{k'} Y^{\ell'} Z^{m'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ m & \ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k' & 1 & 0 \\ m' & \ell' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+k' & 1 & 0 \\ m+m'+k'\ell & \ell+\ell' & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $X^k Y^\ell Z^m X^{k'} Y^{\ell'} Z^{m'} = X^{k+k'} Y^{\ell+\ell'} Z^{m+m'+k'\ell}$.

4. Comme $I_3 = M(0, 0, 0)$, $I_3 \in \mathcal{H}$. Par la question 2, on peut réécrire le résultat de la question précédente comme

$$M(k, \ell, m)M(k', \ell', m') = M(k+k', \ell+\ell', m+m'+k'\ell)$$

pour tous $k, \ell, m, k', \ell', m' \in \mathbb{Z}$. Donc, $\mathcal{H}$ est stable par produit.

Enfin, si $k, \ell, m \in \mathbb{Z}$, on a par la formule précédente que

$$M(k, \ell, m)M(-k, -\ell, k\ell - m) = I_3.$$

Ceci montre à la fois que $\mathcal{H} \subset \text{GL}_3(\mathbb{R})$ (on peut aussi dire que $\mathcal{H}$ est constitué de matrices triangulaires avec des coefficients diagonaux non nuls) et que $\mathcal{H}$ est stable par passage à l'inverse. Ainsi, $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\text{GL}_3(\mathbb{R})$.

5. Par la formule de la question 3, on a $X^{-1}YXY^{-1} = Z$. Ceci montre que $Z \in \langle X, Y \rangle$. Ainsi, $\langle X, Y, Z \rangle = \langle X, Y \rangle$. Par la question 2, tout élément de $\mathcal{H}$ s'écrit comme un produit de puissances de X , Y et Z , de sorte que $\mathcal{H} = \langle X, Y, Z \rangle$. Donc, $\mathcal{H} = \langle X, Y \rangle$.

6. Soit $M = X^k Y^\ell Z^m$ un élément de $\mathcal{H}$. Par la question 3, M est dans $\mathcal{Z}$ si, et seulement si

$$\forall k', \ell', m' \in \mathbb{Z}, X^{k+k'} Y^{\ell+\ell'} Z^{m+m'+k'\ell} = X^{k'+k} Y^{\ell'+\ell} Z^{m'+m+k\ell'}.$$

Par l'unicité de l'écriture montrée à la question 2, c'est équivalent à :

$$\forall k', \ell', m' \in \mathbb{Z}, (k+k', \ell+\ell', m+m'+k'\ell) = (k'+k, \ell'+\ell, m'+m+k\ell').$$

Et ceci est équivalent à demander que $k'\ell = k\ell'$ pour tous $k', \ell' \in \mathbb{Z}$. On constate rapidement que ceci a lieu ssi $k = \ell = 0$. Ainsi, $\mathcal{Z} = \{Z^m, m \in \mathbb{Z}\} = \langle Z \rangle$.

2.2 Hauteur des éléments de $\mathcal{H}$

7. Notons $m = |M|$ et $n = |N|$. On peut trouver $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{A}$ tels que $M = U_1 \dots U_m$. On a alors $M^{-1} = U_m^{-1} \dots U_1^{-1}$ et les U_k^{-1} sont aussi dans $\mathcal{A}$. Ceci montre que $|M^{-1}| \leq m$, donc que $|M^{-1}| \leq |M|$. En appliquant le même raisonnement à $|M^{-1}|$, on montre l'inégalité inverse, donc l'égalité.

On peut aussi trouver $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{A}$ tels que $N = V_1 \dots V_n$. Donc, $MN = U_1 \dots U_m V_1 \dots V_n$, ce qui montre que $|MN| \leq m + n = |M| + |N|$.

Il n'y a pas égalité en général. Par exemple, avec $M = X$ et $N = X^{-1}$, on a $|M| = |N| = 1$ mais $|MN| = |I_3| = 0$.

8. Par la formule de la question 3, on a $X^{-k}Y^k X^k Y^{-k} = Z^{k^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|Z^{k^2}| \leq 4k$. On cherche maintenant à majorer $|Z^m|$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Par la question précédente, $|Z^m| = |Z^{-m}|$, de sorte qu'on peut supposer $m \in \mathbb{N}$. Notons k

l'unique entier naturel tel que $k^2 \leq m < (k+1)^2$, c'est-à-dire $k = \lfloor \sqrt{m} \rfloor$. On écrit $Z^m = Z^{k^2} Z^{m-k^2}$. Alors, $|Z^m| \leq |Z^{k^2}| + |Z^{m-k^2}| \leq 4k + (m-k^2) \leq 4k + (k+1)^2 - 1 - k^2 = 6k$. On a donc montré que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $|Z^m| \leq 6\lfloor \sqrt{|m|} \rfloor \leq 6\sqrt{|m|}$. On en déduit immédiatement que pour tous $k, \ell, m \in \mathbb{Z}$,

$$|X^k Y^\ell Z^m| \leq |X^k| + |Y^\ell| + |Z^m| \leq |k| + |\ell| + 6\sqrt{|m|}.$$

9. On va procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété à montrer étant donnée dans l'énoncé.

- Pour $n = 0$, le seul élément de $\mathcal{H}$ de hauteur 0 est $I_3 = X^0 Y^0 Z^0$ et la propriété est satisfaite.
- On suppose le résultat montré pour un entier n . Soient $k, \ell, m \in \mathbb{Z}$ tels que $|X^k Y^\ell Z^m| = n + 1$. On peut donc trouver $U_1, \dots, U_{n+1} \in \mathcal{A}$ tels que $M = X^k Y^\ell Z^m = U_1 U_2 \dots U_{n+1}$. L'élément $M' = U_1 \dots U_n$ est de hauteur n (si sa hauteur était plus petite, celle de M serait $< n + 1$) ; on écrit M' sous sa forme $X^{k'} Y^{\ell'} Z^{m'}$.

Comme $M = M' U_{n+1}$, on peut exprimer k, ℓ, m en fonction de k', ℓ', m' et de la valeur de U_{n+1} . Dans le détail :

- Si $U_{n+1} = Z^{\pm 1}$, $M = X^{k'} Y^{\ell'} Z^{m' \pm 1}$.
- Si $U_{n+1} = X^{\pm 1}$, $M = X^{k'} Y^{\ell'} Z^{m'} X^{\pm 1} = X^{k' \pm 1} Y^{\ell'} Z^{m' \pm \ell'}$.
- Si $U_{n+1} = Y^{\pm 1}$, $M = X^{k'} Y^{\ell'} Z^{m'} Y^{\pm 1} = X^{k'} Y^{\ell' \pm 1} Z^{m'}$.

Selon les cas, on a donc $(k, \ell, m) = (k', \ell', m' \pm 1)$ ou $(k' \pm 1, \ell', m' \pm \ell')$ ou $(k', \ell' \pm 1, m')$. L'hypothèse de récurrence donne $|k'| + |\ell'| \leq n$ et $|m'| \leq n^2$. On en déduit dans tous les cas que $|k| + |\ell| \leq n + 1$. De plus, $|m'| \leq |m| + \max(1, |\ell'|) \leq n^2 + \max(1, n) \leq (n + 1)^2$. Ceci conclut la récurrence. (*Il est possible que des erreurs de calcul se soient glissées.*)

10. Soient $k, \ell, m \in \mathbb{Z}$. Par la question précédente, on a

$$|k| + |\ell| \leq |X^k Y^\ell Z^m| \text{ et } \sqrt{|m|} \leq |X^k Y^\ell Z^m|.$$

On conclut en ajoutant les deux inégalités et en divisant par 2.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$, soient $k, \ell, m \in \mathbb{Z}$. Si $|k| > 2n$ ou si $|\ell| > 2n$ ou si $|m| > 4n^2$, on a $|k| + |\ell| + \sqrt{|m|} > 2n$; donc par la question précédente, on a dans ce cas $|X^k Y^\ell Z^m| > n$. Par contraposée, cela revient à dire que si $X^k Y^\ell Z^m$ est de hauteur $\leq n$, alors il s'écrit $X^k Y^\ell Z^m$ avec $|k| \leq 2n$, $|\ell| \leq 2n$ et $|m| \leq 4n^2$. Le nombre de triplets (k, ℓ, m) vérifiant ces conditions est $T(n) = (4n + 1)(4n + 1)(8n^2 + 1)$. On a donc la majoration $B(n) \leq T(n)$. En particulier, $B(n) = O(n^4)$.

Supposons maintenant que $|k| \leq n/3$, que $|\ell| \leq n/3$ et que $|m| \leq \frac{n^2}{18^2}$. Par la question 8, pour un tel triplet (k, ℓ, m) , on a $|X^k Y^\ell Z^m| \leq n/3 + n/3 + 6\sqrt{n^2/18^2} = n$. Donc, chacun de ces triplets donne un élément (distinct) de hauteur n . Le nombre de tels triplets est $U(n) = (2\lfloor n/3 \rfloor + 1)(2\lfloor n/3 \rfloor + 1)(2\lfloor n^2/18^2 \rfloor + 1)$ et on a donc $B(n) \geq U(n)$. Comme $n^4 = O(U(n))$, on a en particulier $n^4 = O(B(n))$.

En revenant à la définition d'un O , ces deux estimations montrent qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C_1, C_2 > 0$ tels que, pour tout $n \geq N$, $C_1 n^4 \leq B(n) \leq C_2 n^4$.

3 Problème – Sous-espaces de matrices non inversibles

3.1 Matrice inversible dans un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Comme I_n est inversible, $I_n \notin H$. Comme H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il admet pour supplémentaire toute droite qu'il ne contient pas, en particulier $\text{Vect}(I_n)$.

2. On note d un entier naturel tel que $N^d = 0$. On remarque que $(I_n + N) \sum_{k=0}^{d-1} N^k =$

$$I_n - N^d = I_n ; \text{ donc } I_n + N \text{ est inversible d'inverse } \sum_{k=0}^{d-1} N^k.$$

3. Soit N une matrice nilpotente. Par la question 1, on peut écrire $N = A + \lambda I_n$, avec $A \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a donc $A = -\lambda I_n + N$. Si λ était non nul, A serait inversible par la question précédente (comme $I_n - \frac{N}{\lambda}$ serait inversible, $-\lambda I_n + N$ aussi), ce qui est exclu ; donc $\lambda = 0$. Donc, $N = A \in H$.

Ainsi, H contient toutes les matrices nilpotentes.

4. Comme les matrices triangulaires supérieure et inférieure stricte sont nilpotentes, H contient toutes ces matrices. Par combinaisons linéaires, H contient toutes les matrices de diagonale nulle. En particulier, la matrice J telle que $Je_k = e_{k+1}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $Je_n = e_1$. Mais J est inversible (d'inverse J^T) et donc H contient une matrice inversible. C'est absurde.

Ainsi, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

3.2 Sous-espaces de matrices de rang $\leq r$

5. Soient $M, N \in E$, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On peut trouver $A, C \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ et $B, D \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{R})$ telles que $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D^T & C \end{pmatrix}$. Alors,

$$\alpha M + \beta N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha B + \beta D \\ (\alpha B + \beta D)^T & \alpha A + \beta C \end{pmatrix} \in E.$$

Comme de plus E contient la matrice nulle, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $\phi : E \rightarrow \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{R}), M \mapsto (A, B)$ (avec les notations de l'énoncé) est manifestement un isomorphisme d'espaces vectoriels. Donc, E a pour dimension $(n-r)^2 + r(n-r) = n(n-r)$.

6. (a) On a $M + tJ_r = \begin{pmatrix} tI_r & B \\ B^T & A \end{pmatrix}$. Si on multiplie à gauche par la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -\frac{B^T}{t} & I_{n-r} \end{pmatrix}$, on obtient $\begin{pmatrix} tI_r & B \\ 0 & A - \frac{B^T B}{t} \end{pmatrix}$. Si on multiplie cette dernière matrice à droite par $\begin{pmatrix} I_r & -\frac{B}{t} \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$, on obtient $\begin{pmatrix} tI_r & 0 \\ 0 & A - \frac{B^T B}{t} \end{pmatrix}$. Comme on a multiplié par des matrices inversibles (elles sont triangulaires avec des 1 sur la diagonale), on a le résultat annoncé.

- (b) Comme elles sont équivalentes, les matrices $M + tJ_r$ et $\begin{pmatrix} tI_r & 0 \\ 0 & A - \frac{B^T B}{t} \end{pmatrix}$ ont même rang. Or, le rang de cette dernière matrice est $r + \text{rg} \left(A - \frac{B^T B}{t} \right)$. Par hypothèse, toutes les matrices de F ont $\text{rang} \leq r$ et $M + tJ_r \in F$, donc $A - \frac{B^T B}{t} = 0$. Comme ceci doit être pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a nécessairement $A = B^T B = 0$.
- (c) On a $B^T B \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. Soient $i, k \in \llbracket 1, n-r \rrbracket$. On calcule :

$$[B^T B]_{i,k} = \sum_{j=1}^r [B^T]_{i,j} [B]_{j,k} = \sum_{j=1}^r b_{j,i} b_{j,k}.$$

En particulier, pour $i = k$, on a $0 = [B^T B]_{i,i} = \sum_{j=1}^r b_{j,i}^2$. Comme les coefficients sont réels, tous les $b_{j,i}$ pour $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $i \in \llbracket 1, n-r \rrbracket$ doivent être nuls. Donc, $B = 0$. On a vu à la question précédente qu'on a aussi $A = 0$. Donc, $M = 0$.

7. On a montré à la question précédente que E et F étaient en somme directe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\dim E = n(n-r)$, on a $\dim F \leq n^2 - n(n-r) = nr$.
8. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont de rang inférieur à r . Notons p le rang maximal d'un élément de F et A une matrice dans F de rang p . On sait que A est équivalente à J_p ; il existe donc P et Q dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $J_p = P^{-1} A Q$.
On considère maintenant $F' = P^{-1} F Q = \{P^{-1} M Q, M \in F\}$. Comme l'application $X \mapsto P^{-1} X Q$ est un automorphisme (linéaire) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (d'inverse $Y \mapsto P Y Q^{-1}$), F' est un ssev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension que F . De plus, une matrice de F' est équivalente à une matrice de F donc a un rang $\leq p$; enfin $J_p \in F'$.
En appliquant la question précédente à F' (avec p au lieu de r), on obtient que $\dim F' \leq np \leq nr$. Donc, $\dim F \leq nr$.

3.3 Sous-espaces de dimension maximale sans matrice inversible

9. Si M est dans K_D , $D \subset \text{Ker } M$; en particulier, le noyau de M n'est pas réduit à $\{0\}$: M n'est pas inversible.
Fixons une base $\mathbf{e}'$ de $\mathbb{K}^n$ dont le premier vecteur u est dans D . Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P^{-1} M P$ est la matrice de l'application linéaire canoniquement associée à M dans la base $\mathbf{e}'$. En particulier, $M \in K_D$ ssi la première colonne de $P^{-1} M P$ est nulle. Ainsi, $P^{-1} K_D P$ est de dimension $n(n-1)$. Comme l'application $X \mapsto P^{-1} X P$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (d'inverse $Y \mapsto P Y P^{-1}$), K_D est aussi de dimension $n(n-1)$. Donc, $K_D \in \mathcal{A}$.
10. Soit $M \in F$, soit $t \in \mathbb{R}$. Comme les matrices M et J_{n-1} sont dans F , $M + tJ_{n-1}$ aussi. Par hypothèse, les matrices de F sont non inversibles, donc $M + tJ_{n-1}$ a un noyau non réduit à $\{0\}$.
11. (a) Par la question précédente, le noyau de $M + tJ_{n-1} = \begin{pmatrix} A_M + tI_{n-1} & C_M \\ L_M & \alpha_M \end{pmatrix}$ n'est pas réduit à 0. On note par blocs $\begin{pmatrix} X_t \\ \lambda_t \end{pmatrix}$, avec $X_t \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda_t \in \mathbb{R}$ un

élément de son noyau. Par calculs par blocs, on a

$$A_M X_t + tX_t + C_M \times \lambda_t = 0 \text{ et } L_M X_t + \alpha_M \times \lambda_t = 0.$$

Comme α_M est supposé non nul, $\lambda_t = -\frac{L_M X_t}{\alpha_M}$; en substituant dans la première égalité, on obtient

$$A_M X_t + tX_t - \frac{C_M L_M}{\alpha_M} X_t = 0.$$

Si X_t était nul, on aurait aussi $\lambda_t = -\frac{L_M X_t}{\alpha_M}$, ce qui est exclu ; donc $X_t \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

- (b) Notons R la matrice $A_M - \frac{C_M L_M}{\alpha_M}$; c'est une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Par la question précédente, on a $RX_t = -tX_t$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme les X_t sont non nuls, $-t$ est valeur propre de R pour tout $t \in \mathbb{R}$; mais on sait que R a au plus $n-1$ valeurs propres distinctes : c'est absurde.
Donc, $\alpha_M = 0$.

12. (a) On utilise le même raisonnement qu'en 11.a). Avec les mêmes notations, on a

$$A_M X_t + tX_t + \lambda_t C_M = 0 \text{ et } L_M X_t = 0.$$

Si X_t valait 0, alors $\lambda_t C_M$ aussi. Comme on a supposé C_M non nul, on aurait $\lambda_t = 0$, ce qui est exclu ; donc X_t est non nul. Quitte à modifier X_t en $\frac{X_t}{\|X_t\|}$, on peut alors supposer que $\|X_t\| = 1$.

- (b) On multiplie la première égalité de la question précédente à gauche par L_M . Comme $L_M X_t = 0$, on obtient :

$$L_M A_M X_t + \lambda_t L_M C_M = 0.$$

Il n'y a plus qu'à diviser par λ_t , si $\lambda_t \neq 0$.

- (c) On reprend la première égalité de 12.a). On a $A_M X_t + tX_t = -\lambda_t C_M$. Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$; le i -ème coefficient de $A_M X_t + tX_t$ est $\sum_{j=1}^{n-1} [A_M]_{i,j} x_j + t x_i$. Par inégalité

triangulaire inversée sa valeur absolue est minorée par $|t||x_i| - \sum_{j=1}^n [A_M]_{i,j} |x_j| \geq$

$|t||x_i| - \sum_{j=1}^n [A_M]_{i,j}$, car $\|X\| = 1$. On peut de plus choisir i tel que $|x_i| = 1$. Ainsi,

$$\left| [A_M X_t + tX_t]_i \right| \rightarrow +\infty, \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

On a donc aussi $|\lambda_t| \left| [C_M]_i \right| \rightarrow +\infty$, quand $t \rightarrow +\infty$. Nécessairement $[C_M]_i \neq 0$ et $|\lambda_t| \rightarrow +\infty$, quand $t \rightarrow +\infty$.

Dans la fraction $\frac{L_M A_M X_t}{\lambda_t}$, le numérateur (qui est un scalaire) est borné (comme fonction de t) car il s'écrit comme combinaison linéaire de coefficients fixes et des

coefficients de X_t , dont les valeurs absolues sont majorées par 1. Donc, $\frac{L_M A_M X_t}{\lambda_t} \rightarrow 0$, quand $t \rightarrow +\infty$. Par l'égalité précédente, $L_M C_M = 0$.

Ceci conclut le cas où $C_M \neq 0$. Mais si $C_M = 0$, on a bien sûr $L_M C_M = 0$.

13. (a) Soit N une matrice de $\text{Im } \phi$ de la forme $\begin{pmatrix} 0 & C_N \\ C_N^T & 0 \end{pmatrix}$. On peut donc trouver $M \in F$ tel que $C_M = C_N$ et $L_M = C_N^T$. Par la question 12, on a donc $C_N^T C_N = 0$. Donc, $0 = \sum_{i=1}^{n-1} [C_N]_i^2$, donc $C_N = 0$.
- (b) Par la question précédente, $\text{Im } \phi$ est en somme directe avec le ssev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & C \\ C^T & 0 \end{pmatrix}$. Il s'agit d'un ssev de dimension $n-1$; comme $\text{Im } \phi$ et cet espace sont inclus dans le ssev des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & C \\ L & 0 \end{pmatrix}$, qui est de dimension $2(n-1)$, on a $\text{rg } \phi + (n-1) \leq 2(n-1)$, donc $\text{rg } \phi \leq n-1$.
- (c) Par le théorème du rang, $\dim \text{Ker } \phi = \dim F - \text{rg } \phi \geq n(n-1) - (n-1) = (n-1)^2$. Or, $\text{Ker } \phi$ est l'ensemble des matrices de F de la forme $\begin{pmatrix} A_M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (car on a vu que $\alpha_M = 0$) ; il est donc inclus dans le ssev des matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Comme ce ssev est aussi de dimension $(n-1)^2$, il y a en fait égalité.
14. (a) La matrice A' est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc, l'application $\theta : X \mapsto A'X$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $F' = \theta(F)$, F' est un ssev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dim F = n(n-1)$. De plus, les matrices de F' sont équivalentes à des matrices de F , donc sont non inversibles. Enfin, comme $C = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est dans F , $J_{n-1} = A' \times C$ est dans F' .
- (b) Soit $M \in F$. On a $A'M = \begin{pmatrix} AA_M & AC_M \\ L_M & 0 \end{pmatrix} \in F'$. Or, on a vu dans la question précédente que F' vérifiait les mêmes hypothèses que F ; en appliquant la question 12 à $A'M$ on a donc $L_M AC_M = 0$.
15. Soit $M \in F$. On raisonne par l'absurde en supposant que C_M et L_M sont non nuls. On peut considérer deux bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, l'une avec C_M comme premier vecteur, l'autre avec L_M^T comme premier vecteur. Notons P la matrice de passage de $\mathbf{e}$ vers $\mathbf{e}'$. Par définition, on a alors $PC_M = L_M^T$. En utilisant la question précédente avec P à la place de A , on a donc $L_M L_M^T = 0$; donc $L_M = 0$ par un argument déjà donné. C'est absurde. Donc, $C_M = 0$ ou $L_M = 0$.
16. Notons F_1 l'ensemble des M dans F telles que $C_M = 0$, F_2 l'ensemble des M dans F telles que $L_M = 0$. Ce sont des ssev de F et la question précédente montre que $F = F_1 \cup F_2$.

Si on avait $F_1 \neq F$ et $F_2 \neq F$, on aurait deux éléments M et N de F tels que $C_M = 0$ et $L_M \neq 0$; $C_N \neq 0$ et $L_N = 0$. Alors, $M + N \in F$ mais $C_{M+N} \neq 0$ et $L_{M+N} \neq 0$, ce qui est absurde.

Donc, $F = F_1$ ou $F = F_2$, ce qui conclut.

Si pour tout $M \in F$, $C_M = 0$, F est inclus dans l'espace vectoriel des matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ L & 0 \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$. Comme ce ssev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension $n(n-1)$, F lui est égal par égalité des dimensions. Avec les notations du début du problème, $F = K_D$, où D désigne droite engendrée par le dernier élément de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

De même, si pour tout $M \in F$, $L_M = 0$, $F = I_H$, où H désigne l'hyperplan engendré par les $n-1$ premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

17. Cas général.

- (a) Comme $\dim = n(n-1) > n(n-2)$, F contient une matrice de rang $n-1$, par contraposée du résultat de la partie 2, avec $r = 2$.
- (b) On note M une telle matrice de F de rang $n-1$. On peut donc trouver $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $J_{n-1} = P^{-1}MQ$. On note $F' = P^{-1}FQ$. Alors, F' est un ssev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension que F ; comme il est constitué de matrices équivalentes à celles de F , il ne contient aucune matrice inversible ; de plus F' contient par construction J_{n-1} .

On peut donc appliquer ce qui a été fait à F' et il y a deux cas.

- Ou bien $F' = K_D$, où D est la droite engendrée par le dernier élément de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas,

$$M \in F \iff P^{-1}MQ \in F' \iff D \subset \text{Ker } P^{-1}MQ,$$

. C'est encore équivalent à demander que $QD \subset \text{Ker } M$ (car P^{-1} est inversible). Donc, dans ce cas, $F = K_{QD}$ (comme Q est inversible, QD est une droite vectorielle).

- Ou bien $F' = I_H$, où H est l'hyperplan engendré par les $n-1$ premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors,

$$M \in F \iff \text{Im } P^{-1}MQ \subset H \iff \text{Im } M \subset PH.$$

Donc, dans ce cas, $F = I_{PH}$ (avec PH qui est bien un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.)

De plus, on a dit en début de partie que tous les K_D et I_H étaient des éléments de $\mathcal{A}$. Finalement,

$$\mathcal{A} = \{K_D, D \text{ droite de } \mathbb{R}^n\} \cup \{I_H, H \text{ hyperplan de } \mathbb{R}^n\}.$$