

## DM 17A - Asymptotique - technique

**1 Calculs – DS6 2022-2023**

1. On note  $g(x) = \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$ . On a

$$g(x) = \exp\left(\frac{\sin x}{x-\sin x} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right).$$

On calcule :

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

On en déduit que  $\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{6} + o(x^2)$ . De plus,

$$\frac{\sin x}{x - \sin x} \sim \frac{x}{\frac{x^3}{6}} = \frac{6}{x^2}.$$

Donc,  $\frac{\sin x}{x - \sin x} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) \sim \frac{6}{x^2} \times \frac{x^2}{6} = 1$ .

Par composition de limites, on en déduit que  $\lim_0 g = e$ .

2. On commence par écrire le développement limité de  $\sqrt{1+u}$  à la précision  $o(u^3)$ .

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3).$$

On calcule :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \left( \sqrt{1 + \frac{2}{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= x^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{2}{x} - \frac{1}{8} \frac{4}{x^2} + \frac{1}{16} \frac{8}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \left( 1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \right) \\ &= x - 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que la droite d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$ . De plus, l'asymptote est en-dessous de cette courbe (au voisinage de  $+\infty$ ).

**2 Une suite implicite – exercice 15 du TD**

1. La fonction  $f : x \mapsto x + e^x$  est strictement croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et de limites  $\pm\infty$  en  $\pm\infty$ . Comme elle est continue, elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ; en particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  a un unique antécédent, qu'on note  $x_n$ .

2. La suite  $(x_n)$  est strictement croissante car pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n = f^{-1}(n)$  et que  $f^{-1}$  est strictement croissante (car bijection réciproque de  $f$ , qui est strictement croissante). Donc, par le théorème de la limite monotone,  $(x_n)$  admet une limite. Si celle-ci était finie,  $(x_n)$  serait majorée par un réel  $M$ . On aurait alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n = x_n + e^{x_n} \leq C + e^C$ , ce qui est absurde. Donc,  $(x_n)$  tend vers  $+\infty$ .  
Comme  $\lim x_n = +\infty$ , on a par croissance comparée  $n = x_n + e^{x_n} \sim e^{x_n}$ . Ainsi,  $e^{x_n} = n + o(n)$ . On passe au logarithme et on factorise par  $n$  :

$$x_n = \ln(n(1 + o(1))) = \ln n + \ln(1 + o(1)) = \ln n + o(1).$$

En particulier  $x_n \sim \ln n$ . (On est en fait plus précis, puisqu'on sait que le terme suivant dans un développement asymptotique de  $x_n$  tend en fait vers 0.)

3. On note  $y_n = x_n - \ln n$ . On substitue dans l'égalité  $x_n + e^{x_n} = n$  définissant  $x_n$  :

$$\ln n + y_n + e^{\ln n + y_n} = n.$$

On obtient :

$$\ln n + y_n + n e^{y_n} = n.$$

Mais on a vu qu'en fait  $y_n = x_n - \ln n = o(1)$ . On peut donc développer  $e^{y_n}$  :

$$e^{y_n} = 1 + y_n + o(y_n).$$

Donc,

$$\ln n + y_n + n y_n + o(n y_n) = 0.$$

On peut absorber le terme  $y_n$  dans le  $o(n y_n)$ . Il vient ainsi :

$$n y_n + o(n y_n) = -\ln n.$$

D'où  $y_n \sim -\frac{\ln n}{n}$ . Et donc  $x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ .

### 3 Fonction W de Lambert – DS6 2022-2023

1.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  comme produit de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$ . On a  $f'(t) = (t+1)e^t \geq 0$ , avec égalité seulement en  $-1$ . Donc  $f$  est strictement croissante. De plus,  $f(-1) = -e^{-1}$  et  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ .

Par le théorème de la bijection,  $f$  réalise une bijection de  $[-1, +\infty[$  sur  $[-e^{-1}, +\infty[$ .

2. Soit  $x \geq -e^{-1}$ . Par définition, on a  $W(x)e^{W(x)} = x$ . On passe au logarithme :

$$W(x) + \ln W(x) = \ln x.$$

Des variations de  $f$ , on déduit que  $\lim_{+\infty} W = +\infty$ . Donc,  $\ln W(x) = o(W(x))$ . Donc  $W(x) \sim \ln x$  en  $+\infty$ .

Notons maintenant  $y(x) = W(x) - \ln x$ . On réécrit l'équation précédente :

$$y(x) + \ln x + \ln(\ln x + y(x)) = \ln x.$$

Et  $y(x) = o(\ln x)$  en  $+\infty$ . Donc,

$$y(x) + \ln(\ln x) + \ln\left(1 + \frac{y(x)}{\ln x}\right) = 0.$$

Comme  $\frac{y(x)}{\ln x}$  tend vers 0 en  $+\infty$ , on en déduit :

$$y(x) + \ln(\ln x) + O\left(\frac{y(x)}{\ln x}\right) = 0.$$

Le terme  $O\left(\frac{y(x)}{\ln x}\right)$  est borné et  $\ln(\ln x)$  tend vers  $+\infty$ . Donc,  $y(x) \sim -\ln(\ln x)$ . Et on peut réécrire plus précisément :

$$y(x) = -\ln(\ln x) + O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right).$$

Finalement :

$$W(x) = \ln x - \ln(\ln x) + O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right).$$

3. La dérivée de  $f$  ne s'annule qu'en  $-1$ , d'image  $-e^{-1}$  par  $f$ . Donc  $W$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -e^{-1}, +\infty[$ . En particulier, elle admet un développement limité à tout ordre en 0. On a  $f(0) = 0$ , donc  $W(0) = 0$ . On peut donc écrire  $W(x) = ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)$ , où  $a, b, c$  sont à déterminer.

Pour  $x \geq -e^{-1}$ , on a l'égalité  $W(x)e^{W(x)} = x$ . Donc,

$$(ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)) \exp(ax + bx^2 + o(x^2)) = x.$$

On développe :

$$x(a + bx + cx^2 + o(x^2))(1 + (ax + bx^2) + \frac{1}{2}(ax + bx^2)^2 + o(x^2)) = x.$$

$$x\left(a + (a^2 + b)x + \left(c + 2ab + \frac{a^2}{2}\right)x^2 + o(x^2)\right) = x.$$

On en déduit que  $a = 1$ ,  $a^2 + b = 0$  et  $c + 2ab + \frac{a^2}{2} = 0$ . Donc  $a = 1$ ,  $b = -1$  et  $c = \frac{3}{2}$ . Donc,

$$W(x) = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3).$$