

## Séries numériques

## 1 Nature d'une série

**EXERCICE 1.** ●○○ Séries à termes positifs

Déterminer la nature des séries suivantes :

a)  $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

f)  $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

k)  $\sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x} dx$

b)  $\sum e^{-\sqrt{n}}$

g)  $\sum \frac{n!^2}{(2n)!}$

l)  $\sum \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) (\alpha > 0)$

c)  $\sum \frac{n}{2^n + n}$

h)  $\sum \frac{1}{\ln(n)^n}$

m)  $\sum \cos^n\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) (\alpha > 0)$

d)  $\sum \frac{1}{(n^2 + 1) \sin(1/\sqrt{n})}$

i)  $\sum \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$

n)  $\sum \sqrt{\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}$

e)  $\sum \frac{n^3 \ln(2n)}{3^n}$

j)  $\sum e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

o)  $\sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{1+t^n}$

**EXERCICE 2.** ◇ - ●○○ Entre  $\sum \frac{1}{n}$  et  $\sum \frac{1}{n^2}$ Déterminer la nature de la série  $\sum u_n$  où  $u_n = \frac{1}{n}$  si  $n$  est un carré parfait,  $u_n = \frac{1}{n^2}$  sinon.**EXERCICE 3.** ♣ - ●○○ Séries à termes de signe variableDéterminer la nature des séries suivantes : ( $\alpha, \beta > 0$ )

a)  $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}$

d)  $\sum \frac{\sin(n^\alpha)}{n^2}$

g)  $\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n-1}}$

b)  $\sum \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin(n^2)}$

e)  $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$

h)  $\sum \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$

c)  $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$

f)  $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

i)  $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

**EXERCICE 4.** ●○○ Avec écriture décimale

Déterminer la nature des séries suivantes :

1.  $\sum \frac{1}{nc(n)^\alpha}$ , où  $c(n)$  est le nombre de chiffres de  $n$  en base 10 et  $\alpha > 0$ .

2.  $\sum \frac{1}{k_n}$ , où  $k_n$  est le  $n$ -ème entier dont l'écriture en base 10 est sans le chiffre 9.

**EXERCICE 5.** ●○○ Une série dont le terme général est défini par récurrence

Déterminer la nature de la série  $\sum u_n$  où  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{\cos u_n}{n+1}.$$

**EXERCICE 6.** ●●○  $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n}$

Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n}$ .

**EXERCICE 7.** ●●○  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$

On considère la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ .

1. Quelle est la nature de la série  $\sum \frac{1}{x_n}$  ?
2. Trouver une relation entre  $x_{n+1}^2$  et  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2}$ .
3. Déterminer un équivalent de  $x_n$ .

**EXERCICE 8.** ♣ – ●●○ Une série avec des restes

Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ .

**EXERCICE 9.** ●●○  $\sum \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$

Après avoir justifié son existence, déterminer un équivalent de  $R_n = \sum_{k \geq n} \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^k)$ .

**EXERCICE 10.** ◇ – ●●○ Étude fine de convergence

Déterminer la nature des séries  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$  et  $\sum \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$ , où  $\alpha > 0$ .

**EXERCICE 11.** ♣/◇ – ●●○  $\sum \frac{|\sin n|}{n}$

Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{|\sin n|}{n}$ .

## 2 Calculs de sommes de séries

**EXERCICE 12.** ●●○ Calculs divers de sommes

Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

a)  $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

b)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

c)  $\sum_{n \geq 1} (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{array}{lll} \text{d) } \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} & \text{f) } \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{n!} & \text{h) } \sum_{n \geq 2} \ln \left( \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n} \right) \\ \text{e) } \sum_{n \geq 0} \frac{\cos n}{2^n} & \text{g) } \sum_{n \geq 2} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) & \text{i) } \sum_{n \geq 0} (3 + (-1)^n)^{-n} \end{array}$$

**EXERCICE 13.** ●●○ Somme d'une série de restes

- Justifier l'existence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par  $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ .
- Montrer la convergence de  $\sum_{n \geq 1} u_n$  et calculer sa somme.

**EXERCICE 14.** ♣ - ●●○ Regroupement de termes

Montrer la convergence et calculer la somme de  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ .

**EXERCICE 15.** ♣ - ●●● Summe  $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

- Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}$ . Montrer que la suite  $(c_n)$  converge.
- Trouver des réels  $r, s, t$  tels que pour tout  $n \geq 2$  :

$$\sum_{k=2}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = r \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + s \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} + t \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k}.$$

- En déduire la valeur de la somme  $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ .

### 3 Comparaison série-intégrale

**EXERCICE 16.** ●○○ Avec des séries de Riemann

On ne suppose pas connus les équivalents des sommes partielles ou restes des séries de Riemann.

- Déterminer la nature de  $\sum u_n$ , où  $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$
- Déterminer la nature de  $\sum u_n$ , où  $u_n = \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^\alpha}$ , où  $\alpha > 0$ .
- Déterminer la limite de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , où  $S_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

**EXERCICE 17.** ♣ - ●○○  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$

Déterminer un équivalent, quand  $n \rightarrow +\infty$ , de  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$ .

**EXERCICE 18.** ♣ - ●●○○  $\sum_{k=1}^n \ln^2 k$

Déterminer un équivalent, quand  $n \rightarrow +\infty$ , de  $\sum_{k=1}^n \ln^2 k$ .

**EXERCICE 19.** ●●○○  $\sum n^{1/n}$

- Déterminer la nature de la série  $\sum n^{1/n}$ .
- On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n k^{1/k}$ . Montrer que  $S_n \sim n$ , puis que  $S_n - n \sim \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$ .

**EXERCICE 20.** ●●○ Une comparaison série-intégrale non monotone

- Montrer que la fonction  $x \mapsto \int_1^x \frac{\sin(\ln t)}{t} dt$  diverge en  $+\infty$ .
- À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que

$$\left| \frac{\sin(\ln k)}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\sin(\ln t)}{t} dt \right| = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

- En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\ln n)}{n}$  diverge.

**EXERCICE 21.** ♣ - ●●●○ Séries de Hardy

- Soit  $f \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[)$  telle que  $x \mapsto \int_1^x |f'(t)| dt$  converge en  $+\infty$ .  
Montrer que  $\sum_{n \geq 1} f(n)$  converge ssi la fonction  $x \mapsto \int_1^x f(t) dt$  converge en  $+\infty$ .
- Soit  $\alpha > 0$ . Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la série  $\sum_n \frac{\sin \sqrt{n}}{n^\alpha}$  converge-t-elle ?

## 4 Séries - théorie

**EXERCICE 22.** ●○○  $\sum u_n$  et  $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$

- Soit  $(u_n)$  une suite de réels positifs. Montrer que  $\sum u_n$  et  $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$  ont la même nature.
- Qu'en est-il si on ne suppose plus les  $u_n$  positifs ?

**EXERCICE 23.**  $\diamond - \bullet \circ \circ$  *Théorème de point fixe*

Soit  $I$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ , soit  $f$  une application contractante de  $I$  dans  $I$ . Montrer que  $f$  admet un unique point fixe.

**EXERCICE 24.**  $\clubsuit - \bullet \bullet \circ$  *Suite décroissante telle que  $\sum u_n$  converge*

Soit  $(u_n)$  une suite décroissante de réels positifs telle que  $\sum u_n$  converge.

Étudier la série de terme général  $n(u_{n-1} - u_n)$  et en déduire que  $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

**EXERCICE 25.**  $\bullet \bullet \circ$  *Règle de Raabe-Duhamel*

Soit  $(u_n)$  une suite de réels positifs et  $\alpha > 0$  tels que :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

1. On pose  $v_n = n^\alpha u_n$  et  $w_n = \ln v_{n+1} - \ln v_n$ .  
Montrer que la série  $\sum w_n$  est absolument convergente.
2. En déduire qu'il existe  $A > 0$  tel que  $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ . Conclure quant à la nature de  $\sum u_n$ .
3. Application : soient  $0 < a < b$ . On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ .  
Déterminer la nature de  $\sum u_n$ .

**EXERCICE 26.**  $\bullet \bullet \circ$  *Un produit infini*

Étudier la convergence de  $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$ .

**EXERCICE 27.**  $\clubsuit - \bullet \bullet \circ$  *Développement asymptotique de la série harmonique*

1. Montrer que  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$  tend vers une constante, qu'on notera  $\gamma$ .
2. À l'aide de la série de terme général  $(u_{n+1} - u_n)$  et d'une comparaison série-intégrale, montrer que  $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$ .
3. Montrer enfin que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

**EXERCICE 28.**  $\clubsuit - \bullet \bullet \circ$  *Avec des permutations*

1. Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathbb{N}^*$ . Déterminer la nature de  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ .
2. Existe-t-il  $\alpha > 2$  tel que, pour toute permutation  $\sigma$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^\alpha}$  converge ?

**EXERCICE 29.**  $\bullet \bullet \circ$  *Série des inverses des ppcm*

Soit  $(u_n)$  une suite strictement croissante d'entiers dans  $\mathbb{N}^*$ .

Déterminer la nature de  $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ , où  $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \text{ppcm}(u_0, \dots, u_n)$ .

**EXERCICE 30.** ●●○ *Un raffinement de l'équivalent de Stirling*

1. Donner un équivalent de l'aire  $u_n$  comprise entre le graphe de  $\ln$  sur  $[n, n+1]$  et la corde correspondante.
2. En déduire un développement asymptotique 5 termes de  $\ln n!$  puis un développement asymptotique à deux termes de  $n!$ .

**EXERCICE 31.** ♣ – ●●○ *Transformation d'Abel*

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de nombres.

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} V_k (u_{k+1} - u_k)$ .
2. En déduire le *critère d'Abel*:  
Si  $(u_n)$  est une suite de réels positifs, décroissante et de limite nulle ; et si  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, alors la série  $\sum u_n v_n$  est convergente.
3. **Une application :** soient  $\alpha > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Discuter de la nature de la série  $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ .

**EXERCICE 32.** ●●○ *Critère de condensation de Cauchy*

1. Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle décroissant vers 0.  
Montrer que les séries  $\sum a_n$  et  $\sum 2^n a_{2^n}$  ont même nature.
2. En déduire la nature des séries  $\sum \frac{1}{n \ln^\alpha n}$  et  $\sum \frac{1}{n \ln n \ln^\alpha(\ln n)}$ , où  $\alpha > 0$ .

**EXERCICE 33.** ♣ – ●●● *Fonctions préservant la convergence*

On dit que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  préserve la convergence si pour toute série  $\sum_n a_n$  convergente, la série  $\sum_n f(a_n)$  converge également. Montrer que les fonctions préservant la convergence sont les fonctions linéaires sur un voisinage de 0.

## Indications

**Exercice 2.** Quelle est la nature de la série  $\sum v_n$  où  $v_n = 0$  si  $n$  est un carré parfait ;  $\frac{1}{n}$  sinon ?

**Exercice 10.** Faire un développement asymptotique du terme général, jusqu'à obtenir le terme général d'une série absolument convergente.

**Exercice 11.** Il s'agit de dire proprement que  $\sin(n)$  est très souvent éloigné de 0.

**Exercice 23.** Pour l'existence, on pourra considérer une série de terme général  $f^{n+1}(x_0) - f^n(x_0)$ , où  $x_0$  est un point arbitraire de  $I$ .