20 - Suites récurrentes

Jeremy Daniel

1 Généralités

Proposition 1.1
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to I$, soit $x \in I$.
Il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Remarque 1.2
Souvent, l'intervalle I de *stabilité* de f n'est pas connu à l'avance. On donne une fonction f sans préciser son ensemble de définition, un point $x \in \mathbb{R}$, et on demande de vérifier que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie. La rédaction la plus efficace consiste alors à exhiber un tel intervalle I contenant x.

Exemple 1.3
Soit $x \in [0, 2]$. Montrer que la suite définie par récurrence par $u_0 = x$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$$

est bien définie.

Dans la suite, $f : I \to I$, $x \in I$ et (u_n) est la suite récurrente définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition 1.4 (Limite d'une suite récurrente)
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I. Si $\lim u_n = a$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$.

Attention !
Cette proposition ne dit rien sur l'existence d'une limite à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais elle contraint les limites possibles. Même dans le cas où un seul a vérifie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$, (u_n) n'aura pas a pour limite en générale. Penser à $u_{n+1} = -u_n$.

Corollaire 1.5 (Limite finie, cas d'une fonction continue)
On suppose que f est continue et que $\lim u_n = a \in I$. Alors a est un point fixe de f.

Proposition 1.6 (Point fixe attractif/répulsif)
On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que a est un point fixe de f.

– *Si* $|f'(a)| < 1$*, il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que si* $u_0 = x \in I \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$*, alors* (u_n) *converge vers* a*. De plus, il existe alors* $\delta \in [0,1[$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leq \delta^n |u_0 - a|$*.*
– *Si* $|f'(a)| > 1$*,* (u_n) *converge vers* a *ssi* (u_n) *est stationnaire.*

Définition 1.7 (Point fixe attractif/répulsif)
Sous les conditions précédentes, on dit que a est un point fixe attractif si $|f'(a)| < 1$, répulsif si $|f'(a)| > 1$.

Remarque 1.8
Ces notions ont un grand intérêt théorique. Cependant, une simple étude de fonction permettra en pratique d'obtenir ce genre de résultats.

Proposition 1.9 (Sens de variation)
Avec les notations précédentes, on suppose que f *est monotone sur* I*.*
– *Si* f *est croissante, alors* (u_n) *est monotone. Elle est croissante si* $u_1 \geq u_0$ *et décroissante sinon.*
– *Si* f *est décroissante, alors* (u_n) *n'est pas monotone mais les suites extraites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *le sont, de monotonies contraires.*

Remarque 1.10
Dans le cas où f est décroissante, (u_n) converge ssi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

2 Plan d'étude

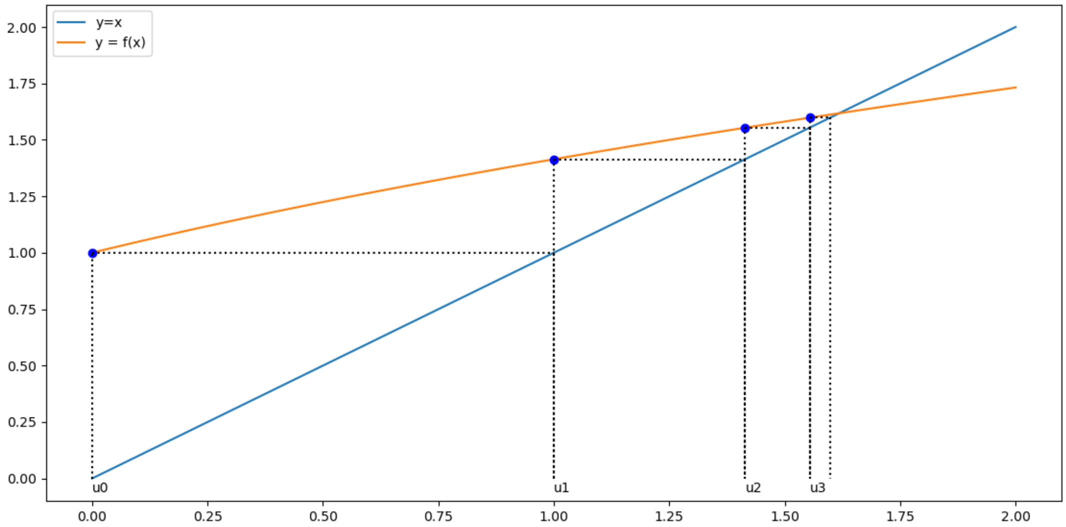
Méthode 2.1 (Plan d'étude d'une suite récurrente)
On suppose que f est continue et on cherche à déterminer la limite éventuelle de (u_n). Sans indication particulière de l'énoncé :
1. **Représentation graphique.** On trace sur un même graphique la courbe représentative de f et la première bissectrice. Ceci permet d'avoir une première idée du comportement de la suite et de sa/ses limite(s) éventuelle(s).
2. On recherche un intervalle I stable par f, contenant u_0 ou – plus généralement – un terme u_p quelconque. Alors, pour tout $n \geq p$, $u_n \in I$.
3. On recherche les points fixes de f, qui sont les seules limites finies possibles.
4. On étudie les variations de la suite. Quand f est monotone, cela revient d'une part à déterminer la monotonie de f et d'autre part à déterminer le signe de $u_1 - u_0$.

3 Recherche d'un équivalent

Exercice 3.1
On considère une suite (u_n) telle que $u_0 \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 3u_n^2$.
Montrer que (u_n) converge vers 0, puis déterminer un équivalent de (u_n).

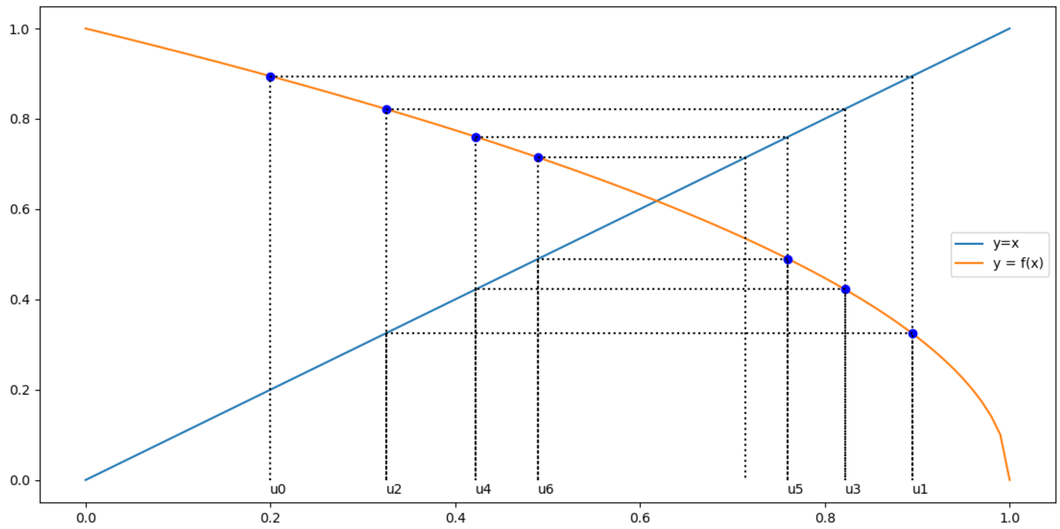
$$f(x) = \sqrt{1+x}\,;\, u_0 = 0.$$

f est croissante, (u_n) aussi.



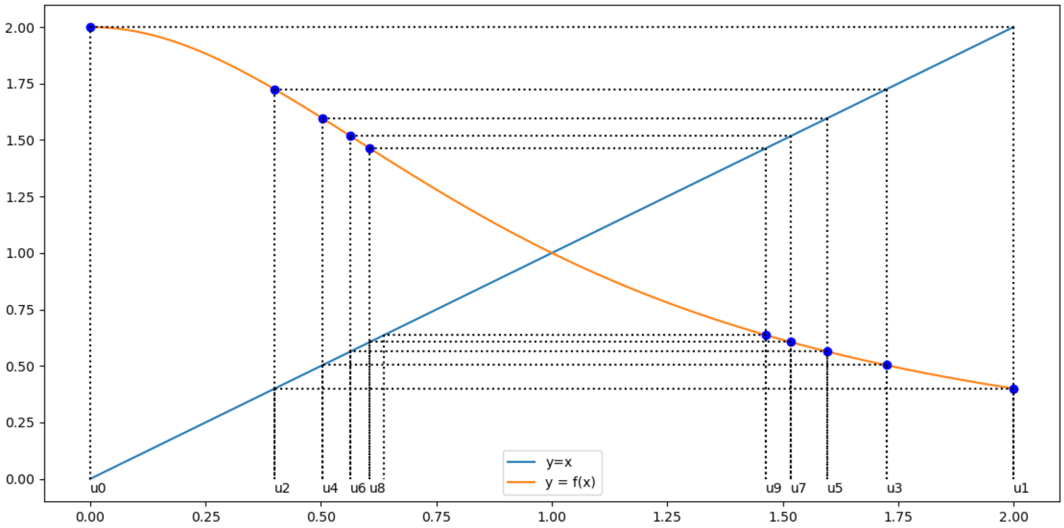
$$f(x) = \sqrt{1-x}\,;\, u_0 = 0,2$$

f est décroissante, (u_{2n}) est croissante, (u_{2n+1}) est décroissante.



$$f(x) = \frac{2}{1+x^2}\,;\, u_0 = 0$$

f est décroissante, (u_{2n}) est croissante, (u_{2n+1}) est décroissante.



$$f(x) = 1 - x^2\,;\, u_0 = 0,5$$

f est décroissante, (u_{2n}) est décroissante, (u_{2n+1}) est croissante.
Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) n'ont pas la même limite, donc (u_n) diverge.