19 - Séries numériques

Jeremy Daniel

1 Convergence d'une séries de nombres

Définition 1.1 (Série de nombres)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles ou complexe. La série de terme général u_n – notée $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ – est la suite de terme général $S_p = \sum\limits_{n=0}^{p} u_n$.

Remarque 1.2
Si la suite (u_n) est définie à partir de l'indice n_0, alors on note plutôt $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ la série correspondante, définie par $S_p = \sum\limits_{n=n_0}^{p} u_n$, pour $n \geq n_0$.

Remarque 1.3
Une série $\sum u_n$ est une suite, mais on cherche à l'étudier *via* le terme général u_n.

Définition 1.4 (Somme partielle)
Avec les notations précédentes, S_p est la somme partielle d'ordre p de la série $\sum u_n$.

Définition 1.5 (Série convergente)
Une série $\sum u_n$ est convergente si la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge.
On note alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de cette suite.
Si $\sum u_n$ n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Définition 1.6 (Reste d'une série convergente)
On suppose que $\sum u_n$ converge. Le reste d'ordre p de cette série est $R_p = \sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} u_n$.

Remarque 1.7
Ceci est bien défini car les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq p+1} u_n$ ont même nature.

Proposition 1.8 (Somme partielle et reste)

Soit $\sum u_n$ *une série convergente. Pour tout* $p \in \mathbb{N}$*, on a* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{p} u_n + \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$.

En notant (S_p) *et* (R_p) *les suites des sommes partielles et des restes d'ordre* p *:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_p + R_p.$$

Proposition 1.9 (Divergence grossière)

Soit $\sum u_n$ *une série de nombres convergente. Alors* $u_n \to 0$.

Remarque 1.10

Si (u_n) ne tend pas vers 0, on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Attention !

Il n'y a pas de réciproque. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

2 Séries à termes positifs

2.1 Théorèmes de comparaison

Proposition 2.1

Soit (u_n) *à termes réels positifs (à partir d'un certain rang). La série* $\sum u_n$ *converge ssi la suite* (S_p) *des sommes partielles est majorée. On a alors :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{p\to+\infty} S_p = \sup_{p\in\mathbb{N}} S_p.$$

Proposition 2.2 (Comparaison de séries à termes positifs)

Soient (u_n) *et* (v_n) *deux suites à termes positifs (à partir d'un certain rang).*

- *On suppose qu'à partir d'un certain rang* $u_n \leq v_n$*. Alors,*
  - *Si* $\sum v_n$ *converge,* $\sum u_n$ *aussi et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
  - *Si* $\sum u_n$ *diverge,* $\sum v_n$ *aussi.*
- *On suppose que* $u_n = O(v_n)$ *(ou* $u_n = o(v_n)$*). Alors,*
  - *Si* $\sum v_n$ *converge,* $\sum u_n$ *aussi.*
  - *Si* $\sum u_n$ *diverge,* $\sum v_n$ *aussi.*
- *On suppose que* $u_n \sim v_n$*. Alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ont même nature.*

Attention !
Ces résultats sont faux en général si les suites (u_n) et (v_n) ne sont pas à termes positifs.

2.2 Séries géométriques, critère de d'Alembert

Proposition 2.3
Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum z^n$ converge ssi $|z| < 1$. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \text{ et } \sum_{n=p}^{+\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z}.$$

Théorème 2.4 (Critère de d'Alembert)
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
- *Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.*

Remarque 2.5
Dans le cas limite $\ell = 1$, on ne peut rien dire *a priori*.
Ainsi, $\sum \frac{1}{n}$ diverge mais $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

2.3 Séries de Riemann

Lemme 2.6 (Comparaison série-intégrale)
Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$. La série de terme général $u_n = \left(\int_n^{n+1} f(t)dt\right) - f(n)$ (définie pour $n \geq \lceil a \rceil$) est convergente.

Remarque 2.7
On peut reformuler en disant que, sous ces hypothèses, la série $\sum f(n)$ est convergente ssi la suite $\left(\int_a^n f(t)dt\right)_n$ est convergente.

Remarque 2.8
Ce n'est pas le seul cas où on peut effectuer une comparaison série-intégrale ; cf. la méthode pour l'obtention de la formule de Stirling.

Théorème 2.9 (Séries de Riemann)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha > 1$.

Exercice 2.10 (Séries de Bertrand)
Soient $\alpha, \beta > 0$. Montrer que $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est convergente ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Proposition 2.11 (Règle du $n^\alpha u_n$)
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.
- *S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_n$ converge.*
- *S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.*

2.4 Asymptotique des séries de Riemann

Exemple 2.12
On considère les séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha > 0$.
- Si $\alpha = 1$, $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \sim \ln p$;
- Si $\alpha < 1$, $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
- Si $\alpha > 1$, $\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)p^{\alpha-1}}$.

Remarque 2.13
Le deuxième équivalent est encore valable si $\alpha < 0$. On préfèrera écrire, pour $\beta \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^{p} n^\beta \sim \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}.$$

Théorème 2.14 (Séries et équivalents – HP)
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs, tels que $u_n \sim v_n$.
- *Si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ aussi.*

  En notant $R_p(u) = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ et $R_p(v) = \sum_{n=p+1}^{+\infty} v_n$, on a $R_p(u) \sim R_p(v)$.
- *Si $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum u_n$ aussi.*

  En notant $S_p(u) = \sum_{n=0}^{p} u_n$ et $S_p(v) = \sum_{n=0}^{p} v_n$, on a $S_p(u) \sim S_p(v)$.

2.5 Formule de Stirling

Lemme 2.15
Il existe une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + A + o(1).$$

Corollaire 2.16 (Formule de Stirling)
On a l'équivalent suivant $n! \sim e^A \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Remarque 2.17
On sait que $e^A = \sqrt{2\pi}$. La démonstration habituelle utilise les intégrale de Wallis

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

On a montré en exercice que

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{\pi}{2 \times 4^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \text{ et } W_{2n+1} = 4^n \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

En considérant $W_{2n} \times W_{2n+1}$, on en a déduit l'équivalent $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En utilisant la formule de Stirling dans l'expression obtenue pour W_{2n}, on en déduit la valeur de e^A.

3 Séries à termes quelconques

3.1 Convergence absolue

Définition 3.1 (Convergence absolue)
Soit (u_n) une suite à termes réels ou complexes.
La série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 3.2
Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente. De plus,

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Définition 3.3 (Séries semi-convergentes)
Une série $\sum u_n$ est semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Remarque 3.4
Pour une série $\sum u_n$ à termes quelconques, on peut donc distinguer les comportements suivants :

- Divergence grossière : (u_n) ne tend pas vers 0
- Divergence non grossière : (u_n) tend vers 0 mais $\sum u_n$ diverge
- Semi-convergence : $\sum u_n$ converge, mais pas $\sum |u_n|$
- Absolue convergence : $\sum |u_n|$ converge, donc $\sum u_n$ aussi

Des exemples de séries semi-convergentes seront donnés en application du critère des séries alternées.

3.2 Séries alternées

Définition 3.5 (Série alternée)
Une série $\sum u_n$ à termes réels est alternée si la suite $\big((-1)^n u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Théorème 3.6 (Critère des séries alternées)
Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que $\big(|u_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit et tend vers 0. Alors, $\sum u_n$ est convergente. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $R_p = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ est du signe de u_{p+1} et vérifie $|R_p(u)| \leq |u_{p+1}|$.

Exemple 3.7
Pour tout $\alpha > 0$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente. Elle est absolument convergente pour $\alpha > 1$ et semi-convergente sinon.

Exercice 3.8
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer qu'il existe un réel γ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

3.3 Exemples d'études de convergence

Exercice 3.9
Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$, pour $\alpha > 0$.

Exercice 3.10
Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^{2/3} + \cos n}$.