

# 18 - Analyse asymptotique

Jeremy Daniel

Pour acquérir le “sens de l’Analyse” indispensable jusque dans les spéculations les plus abstraites, il faut avoir appris à distinguer ce qui est “grand” de ce qui est “petit”, ce qui est “prépondérant” de ce qui est “négligeable”. Le Calcul infinitésimal est l’apprentissage de maniement des inégalités bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : *Majorer, Minorer, Approcher.*

---

Jean Dieudonné, *Calcul infinitésimal*

## 1 Relations de comparaison

$I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  est un point adhérent à  $I$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On rappelle la définition des relations de comparaison pour les fonctions et on donne leurs propriétés principales, analogues à celles déjà vues sur les suites.

DÉFINITION 1.1 (Relations de comparaison pour les fonctions)

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ . On dit que

- $f$  est dominée par  $g$  au voisinage de  $a$  s’il existe  $u : I \rightarrow \mathbb{K}$ , bornée au voisinage de  $a$  telle que  $f = g \times u$  au voisinage de  $a$ .
- $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$  s’il existe  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{K}$ , de limite nulle en  $a$  telle que  $f = g \times \varepsilon$  au voisinage de  $a$ .
- $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$  s’il existe  $u : I \rightarrow \mathbb{K}$  de limite 1 en  $a$  telle que  $f = g \times u$  au voisinage de  $a$ .

NOTATION 1.2

On écrit respectivement  $f = O_{x \rightarrow a}(g)$ ,  $f = o_{x \rightarrow a}(g)$  et  $f \sim_{x \rightarrow a}(g)$ . Quand le contexte est clair, on pourra sous-entendre  $a$ , ou bien l’écrire à côté :  $f = O(g)$  en  $a$ /au voisinage de  $a$ .

**REMARQUE 1.3**

Pour les notations  $o$  et  $O$ , seule la valeur absolue (ou le module) des fonctions a une importance :  $f = O(g) \iff |f| = O(|g|)$  et  $f = o(g) \iff |f| = o(|g|)$ .

**PROPOSITION 1.4** (Équivalents et  $o$ )

Au voisinage de  $a$ ,  $f \sim g \iff f = g + o(g)$ .

**PROPOSITION 1.5**

On suppose que  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ . Alors :

- $f = O(g)$  en  $a$  ssi  $\frac{f}{g}$  est bornée au voisinage de  $a$ .
- $f = o(g)$  en  $a$  ssi  $\frac{f}{g}$  tend vers 0 en  $a$ .
- $f \sim g$  en  $a$  ssi  $\frac{f}{g}$  tend vers 1 en  $a$ .

**REMARQUE 1.6**

Si  $a \in A$  et si  $g(a) = 0$ , on ne peut pas *a priori* utiliser les équivalences précédentes. Cependant, on vérifie que, dans le cas où  $g$  s'annule seulement en  $a$  sur un voisinage de  $a$ , alors  $f = O(g)$  ssi  $f(a) = 0$  et  $\frac{f}{g}$  est bornée sur un *voisinage époinché* de  $a$ . On a des reformulations analogues pour les autres relations de comparaison.

**ATTENTION !**

La plupart des fonctions considérées vérifient cette condition. Des contre-exemples sont donnés par  $\cos$  en  $+\infty$  ou  $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  en 0.

**PROPOSITION 1.7** (Cas particulier des constantes)

On a les équivalences suivantes (où  $\ell \in \mathbb{R}^*$ ) :

- $f = O(1)$  ssi  $f$  est bornée au voisinage de  $a$  ;
- $f = o(1)$  ssi  $f$  tend vers 0 en  $a$  ;
- $f \sim \ell$  ssi  $\lim_a f = \ell$ .

**ATTENTION !**

L'équivalence  $f \sim 0$  en  $a$  signifie que  $f$  est identiquement nulle sur un voisinage de  $a$ . Cela n'arrivera jamais en pratique !

**PROPOSITION 1.8** (Équivalents et limites)

Si  $f \sim g$  en  $a$  et si  $\lim_a f = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $\lim_a g = \ell$ .

**PROPOSITION 1.9** (Substitution fonction/fonction)

Soit  $h : I \rightarrow J$  telle que  $\lim_a h = b$  existe.

- Si  $f = O(g)$  en  $b$ , alors  $f \circ h = O(g \circ h)$  en  $a$  ;
- Si  $f = o(g)$  en  $b$ , alors  $f \circ h = o(g \circ h)$  en  $a$  ;
- Si  $f \sim g$  en  $b$ , alors  $f \circ h \sim g \circ h$  en  $a$ .

**PROPOSITION 1.10** (Substitution fonction/suite)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans  $I$ , de limite  $a$ .

- Si  $f = O(g)$  en  $a$ , alors  $f(u_n) = O(g(u_n))$  en  $+\infty$  ;
- Si  $f = o(g)$  en  $a$ , alors  $f(u_n) = o(g(u_n))$  en  $+\infty$  ;
- Si  $f \sim g$  en  $a$ , alors  $f(u_n) \sim g(u_n)$  en  $+\infty$ .

**PROPOSITION 1.11** (Croissances comparées)

Soit  $a > 0$ , soit  $b > 0$ .

- En  $+\infty$  :  $(\ln x)^b = o(x^a)$  et  $x^b = o(e^{ax})$ .
- En  $0$  :  $|\ln x|^b = o(x^{-a})$ .
- En  $-\infty$  :  $e^{ax} = o(|x|^{-b})$ .

ATTENTION !

Si  $0 \leq a_1 < a_2$ , alors  $x^{a_1} = o(x^{a_2})$  en  $+\infty$  mais  $x^{a_2} = o(x^{a_1})$  en  $0$ .

**PROPOSITION 1.12** (Règles de calcul  $o$  et  $O$ )

On a les règles de calcul suivantes :

- $f = o(g) \implies f = O(g)$  ;
- $f_1 = O(g_1), f_2 = O(g_2) \implies f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$  ;
- $f_1 = O(g_1), f_2 = o(g_2) \implies f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$  ;
- $f_1 = O(g), f_2 = O(g) \implies f_1 + f_2 = O(g)$  ;
- $f_1 = o(g), f_2 = o(g) \implies f_1 + f_2 = o(g)$  ;
- $f = O(g), g = O(h) \implies f = O(h)$  ;
- $f = O(g), g = o(h) \implies f = o(h)$  ;
- $f = o(g), g = O(h) \implies f = o(h)$ .

**REMARQUE 1.13**

Comme  $f_1 = O(f_1)$ , on a en particulier  $f_2 = O(g_2) \implies f_1 f_2 = O(f_1 g_2)$  et  $f_2 = o(g_2) \implies f_1 f_2 = o(f_1 g_2)$ . Dans un produit, on peut donc faire entrer les fonctions dans un  $o/O$ .

## 2 Équivalents

### 2.1 La théorie

ATTENTION !

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $0$ . Les assertions  $f(x) \sim 1 + x$  et  $f(x) - 1 \sim x$

(en 0) ne sont pas équivalentes :

- $f(x) \sim 1 + x$  en 0 signifie que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1+x} = 1$ . C'est équivalent à demander que  $\lim_0 f = 1$ , c'est-à-dire  $f(x) \sim 1$  en 0.
- $f(x) - 1 \sim x$  en 0 signifie que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$ . Cela signifie (si  $f$  est définie en 0) que  $f(0) = 1$  et que  $f$  est dérivable en 0, de dérivée  $f'(0) = 1$ .

**THÉORÈME 2.1** (Développement limité à l'ordre 1)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  dérivable en  $a \in I$ . Alors, en  $a$  :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + o(x - a).$$

Si de plus  $f'(a) \neq 0$ , on a  $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a)$  en  $a$ .

**PROPOSITION 2.2** (Équivalents usuels en 0)

On a les équivalents suivants en 0 (où  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ )

- |                     |                                    |                             |
|---------------------|------------------------------------|-----------------------------|
| - $e^x - 1 \sim x$  | - $\tan x \sim x$                  | - $\text{Arctan } x \sim x$ |
| - $\ln(1+x) \sim x$ | - $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ | - $\text{sh } x \sim x$     |
| - $\sin x \sim x$   | - $\text{Arcsin } x \sim x$        | - $\text{th } x \sim x$ .   |

**EXEMPLE 2.3**

La plupart du temps, on applique la proposition en 0. Mais on a par exemple :

$$\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sim -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

au voisinage de  $\pi/4$ .

**PROPOSITION 2.4** (Propriétés conservées par équivalence)

Soient  $f$  et  $g$ , équivalentes en  $a$ .

- Si  $f$  est positive (resp. strictement positive) au voisinage de  $a$ , alors  $g$  aussi.
- Si  $f$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  (resp. sauf en  $a$ ), alors  $g$  non plus (resp. sauf en  $a$ ).

ATTENTION !

La monotonie des fonctions n'est pas conservée. Par exemple, si  $f(x) = x$  et  $g(x) = x + 2 \sin x$ ,  $f \sim g$  en  $+\infty$ ,  $f$  est croissante (au voisinage de  $+\infty$ ), mais pas  $g$ .

## 2.2 La pratique

### 2.2.1 Produit, quotient, puissance

**PROPOSITION 2.5**

Soient  $f_1, f_2, g_1$  et  $g_2$  définies sur  $I$ , soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors, au voisinage de  $a$  :

- Si  $f_1 \sim g_1$  et  $f_2 \sim g_2$ , alors  $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ ;
- Si  $f_1 \sim g_1$  et  $f_2 \sim g_2$ , alors  $\frac{f_1}{g_1} \sim \frac{g_1}{g_2}$  (si les  $g_i$  ne s'annulent pas au voisinage de  $a$ )
- Si  $f_1 \sim g_1$ , alors  $f_1^\alpha \sim g_1^\alpha$  (si  $f_1, g_1 \geq 0$ ).

EXERCICE 2.6

Équivalents en 0 de  $\cos x - 1$  et de  $\frac{\sin x}{(\cos x - 1) \ln(1+x)^2}$ .

### 2.2.2 Composition

ATTENTION !

En général,  $f \sim g$  en  $a$  n'implique pas  $\phi(f) \sim \phi(g)$  en  $a$ . Considérer par exemple  $x \sim x+1$  en  $+\infty$  et  $\exp$ ; ou bien  $1+x \sim 1$  en 0 et  $\ln$ .

**PROPOSITION 2.7** (Cas de l'exponentielle)

$e^f \sim e^g$  en  $a$  ssi  $\lim_a (f - g) = 0$ .

**PROPOSITION 2.8** (Cas du logarithme)

Soient  $f, g \geq 0$  au voisinage de  $a$ . Si  $f \sim g$ , et si  $f$  (et donc  $g$ ) tend vers  $0^+$  ou  $+\infty$  en  $a$ , alors  $\ln f \sim \ln g$  en  $a$ .

### 2.2.3 Somme

ATTENTION !

On ne peut pas en général sommer les équivalents. Ainsi,  $x \sim x - x^2$  en 0 mais  $(x - x^2) - x = -x^2$  n'est pas équivalent à  $(x - x) = 0$ . Mieux vaut réécrire les équivalents avec des petits  $o$  quand on doit faire une somme.

EXERCICE 2.9

Équivalent de  $\ln(1+x) + \sin x$  en 0. Puis de  $e^x - 1 - \sin x$ .

### 2.2.4 Substitution

EXERCICE 2.10

Équivalent en 0 de  $\sin(e^x - 1)$ .

## 3 Développements limités

$I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  adhérent à  $I$ .

### 3.1 Généralités

**DÉFINITION 3.1** (Développement limité en  $a$ )

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ , soit  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$  s'il existe  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

**REMARQUE 3.2**

$f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$  ssi  $g : x \mapsto f(a+x)$ , définie sur  $J = I - a = \{x \in \mathbb{R} \mid a+x \in I\}$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $0$ . En pratique, on peut toujours se ramener à des développements limités en  $0$ , ce qu'on fait dans la suite.

**PROPOSITION 3.3** (Unicité du développement limité)

Si  $f$  admet en  $0$  deux développements limités à l'ordre  $n$  :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \text{ et } f(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n),$$

alors  $(a_0, \dots, a_n) = (b_0, \dots, b_n)$ .

**DÉFINITION 3.4** (Partie régulière)

Avec les notations précédentes, on appelle partie régulière du développement limité à l'ordre  $n$  en  $0$  de  $f$  la fonction polynomiale  $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ .

**COROLLAIRE 3.5** (DL et parité)

On suppose que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $0$ , de partie régulière

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

- Si  $f$  est paire, les  $a_k$  sont nuls pour  $k$  impair.
- Si  $f$  est impaire, les  $a_k$  sont nuls pour  $k$  pair.

**PROPOSITION 3.6** (DL à un ordre inférieur)

On suppose que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  de partie régulière  $x \mapsto$

$\sum_{k=0}^n a_k x^k$ . Alors, pour tout  $i \leq n$ ,  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $i$  en  $0$ , de

partie régulière  $x \mapsto \sum_{k=0}^i a_k x^k$ .

**PROPOSITION 3.7** (Parties réelle et imaginaire d'un DL)

On suppose que  $f$  est à valeurs complexes. Elle admet un développement limité à l'ordre  $n$  ssi  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  ont un développement limité à l'ordre  $n$ . Dans ce cas, si  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$ , les développements limités de  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont donnés par :

$$(\operatorname{Re} f)(x) = \sum_{k=0}^n (\operatorname{Re} a_k) x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad (\operatorname{Im} f)(x) = \sum_{k=0}^n (\operatorname{Im} a_k) x^k + o(x^n).$$

## 3.2 Développements limités et dérivation

**PROPOSITION 3.8** (DL à l'ordre 0)

$f$  admet un développement limité à l'ordre 0 en 0 ssi  $f$  admet une limite finie en 0. Dans ce cas,  $a_0 = \lim_0 f$ .

REMARQUE 3.9

Selon que  $f$  est définie ou non en 0, cela revient à dire que  $f$  est continue en 0 ou qu'elle admet un prolongement par continuité en 0.

**PROPOSITION 3.10** (DL à l'ordre 1)

$f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, de partie régulière  $x \mapsto a_0 + a_1 x$  ssi (le prolongement continu de)  $f$  est dérivable en 0, avec  $f(0) = a_0$  et  $f'(0) = a_1$ .

ATTENTION !

On arrête là les équivalences. Considérons  $f_k : x \mapsto x^k \sin\left(\frac{1}{x^k}\right)$ , pour  $k \geq 3$ . Alors  $f_k(x) = o(x^{k-1})$  donc  $f$  admet un DL en 0 à l'ordre  $k-1$ . Mais la dérivée de  $f$  n'est pas continue en 0 ; en particulier  $f \notin \mathcal{D}^{k-1}$ .

REMARQUE 3.11

L'exemple précédent montre aussi que si  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0, il n'est pas vrai en général que  $f'$  admet un développement limité à l'ordre  $n-1$  en 0. On a cependant la réciproque.

**THÉORÈME 3.12** (Intégration des DL)

On suppose que  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  est dérivable sur  $I$  et que sa dérivée  $f'$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 :  $f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$ . Alors,  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n+1$  en 0, donné par :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k + o(x^{n+1}).$$

### EXERCICE 3.13

Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de  $\tan$  en 0.

### 3.3 Formule de Taylor-Young

**THÉORÈME 3.14** (Formule de Taylor-Young)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ . On suppose que  $f$  est  $n - 1$  fois dérivable et que  $f^{(n-1)}$  est dérivable en 0. Alors,  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

REMARQUE 3.15

Dans le programme, on suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$  ; on peut montrer cet énoncé plus précis en utilisant le théorème précédent d'intégration des DL.

REMARQUE 3.16

En  $a \neq 0$ , la formule de Taylor-Young est

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n).$$

**PROPOSITION 3.17** (DL usuels)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On a les développements limités suivants en 0 :

- $\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$  ;
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$  ;
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$  ;
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$  ;
- $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$  ;
- $\operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$  ;
- $\operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$  ;
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$  ;

$$\begin{aligned}
- (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n), \text{ où } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}; \\
- \operatorname{Arctan} x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}).
\end{aligned}$$

**REMARQUE 3.18**

Comme on connaît l'ordre de grandeur du premier terme négligé, on peut être légèrement plus précis en remplaçant le  $o$  par un  $O$ . Par exemple,  $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$  est plus précis que  $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ .

**EXERCICE 3.19**

Déterminer le développement limité à l'ordre  $n$  en 0 de Arcsin.

### 3.4 Pratique

#### 3.4.1 DL d'une somme

**EXERCICE 3.20**

DL à l'ordre 3 en 0 de  $e^x - \tan x + \cos x$ .

#### 3.4.2 DL d'un produit

**DÉFINITION 3.21** (Forme normalisée d'un DL)

Soit  $f$  admettant un DL à l'ordre  $n$  de partie régulière  $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  non nulle. On note  $p = \min\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid a_k \neq 0\}$ . La forme normalisée du DL à l'ordre  $n$  de  $f$  est :

$$f(x) = x^p \left( \sum_{k=p}^n a_k x^{k-p} + o(x^{n-p}) \right).$$

**MÉTHODE 3.22**

Supposons qu'on souhaite le DL à l'ordre  $n$  d'un produit  $fg$ . Si les formes normalisées des DL de  $f$  et  $g$  commencent respectivement à  $x^p$  et  $x^q$ , alors les DL de  $f$  et  $g$  à l'ordre  $n - q$  et  $n - p$  respectivement suffisent pour le calcul.

**EXERCICE 3.23**

DL à l'ordre 4 en 0 de  $\tan x \times \ln(1+x)$ .

**EXERCICE 3.24**

DL à l'ordre 5 en 0 de  $(\cos x - 1)(\sin x - x)$ .

### 3.4.3 DL d'un quotient

MÉTHODE 3.25

On se donne un quotient  $\frac{f}{g}$  dont on cherche le développement limité à l'ordre  $n$  en 0. On suppose que  $g(0)$  est non nul. Démarche :

- On se ramène à un dénominateur tendant vers 1 (en factorisant par une constante) et on écrit ce dénominateur sous la forme  $1 - u$  (donc avec  $\lim_{x \rightarrow 0} u = 0$ ).
- On calcule le DL de  $\frac{1}{1 - u}$  par substitution dans le DL de  $\frac{1}{1 - x}$
- On est ramené au DL d'un produit.

EXERCICE 3.26

DL à l'ordre 5 en 0 de  $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ .

EXERCICE 3.27

DL à l'ordre 3 en 0 de  $\frac{1}{1 + e^x}$ .

MÉTHODE 3.28

Si  $g(0) = 0$ , on n'aura pas de DL en général (penser à  $\frac{1}{x}$ ). Plus précisément si  $f(x) \sim a_p x^p$  et  $g(x) \sim b_q x^q$ , alors  $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{a_p}{b_q} x^{p-q}$  et on aura un DL ssi  $p \geq q$ . Cependant, même dans le cas où  $p < q$ , on peut multiplier  $\frac{f}{g}$  par  $x^{q-p}$ , obtenir un DL pour cette fonction et diviser à la fin par  $x^{q-p}$ . On obtient un développement asymptotique de  $\frac{f}{g}$  en 0 (dans ce cas, comme un développement limité, mais en commençant avec des puissances négatives de  $x$ ).

EXERCICE 3.29

Étude en 0 de  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^3 - 1 + \cos x}$ .

### 3.4.4 DL d'une composée

MÉTHODE 3.30

On cherche le DL d'une composition  $g \circ f$  en 0. On suppose que  $f(0) = 0$ . Alors le DL s'obtient par substitution.

EXERCICE 3.31

DL à l'ordre 3 en 0 de  $\ln(1 + \sin x)$ .

MÉTHODE 3.32

Si  $f(0)$  n'est pas égal à 0, on a deux possibilités : ou bien travailler l'expression pour se ramener à des DL en 0, ou bien utiliser le DL de  $g$  ailleurs qu'en 0.

### EXERCICE 3.33

DL à l'ordre 3 en 0 de  $\frac{1}{2+x}$ , puis de  $\ln(1+e^x)$ .

### REMARQUE 3.34

Les développements limités de  $\exp$  et  $\ln$  s'obtiennent rapidement à partir de ceux de référence.

– Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Alors, au voisinage de  $a$  :

$$\exp(x) = \exp(a) \exp(x-a) = \exp(a) \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} + o((x-a)^n).$$

– Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors au voisinage de  $a$  :

$$\ln(x) = \ln(a) + \ln\left(1 + \frac{x-a}{a}\right) = \ln a + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{(x-a)^k}{a^k k} + o((x-a)^n).$$

## 4 Applications

### 4.1 Calculs de limites

#### EXERCICE 4.1

Déterminer les limites suivantes :

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x^2)}; \quad - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - x \cos x - 2x}{\sin^5 x}; \quad - \lim_n e^{-\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

### 4.2 Tangentes et asymptotes

#### 4.2.1 Position relative d'une tangente

##### MÉTHODE 4.2

Supposons qu'au voisinage de  $a$ ,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + a_{k_0}(x-a)^{k_0} + o((x-a)^{k_0}),$$

avec  $a_{k_0} \neq 0$ . Alors, la parité de  $k_0$  et le signe de  $a_{k_0}$  permettent de déterminer le signe (au voisinage de  $a$ ) de  $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ , c'est-à-dire la position relative de la courbe représentative de  $f$  et de sa tangente en  $a$ . On a en effet :  $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \sim a_{k_0}(x-a)^{k_0}$ . Donc :

- Si  $k_0$  est pair, la courbe est au-dessus de sa tangente si  $a_{k_0} > 0$ , en dessous si  $a_{k_0} < 0$ .
- Si  $k_0$  est impair, la tangente traverse la courbe (on dit que  $a$  est un point d'inflexion) ; elle est en dessous puis au-dessus si  $a_{k_0} > 0$ , au-dessus puis en dessous si  $a_{k_0} < 0$ .

##### REMARQUE 4.3

Dans le cas particulier où  $a$  est un point critique de  $f$ , cela revient à étudier si  $a$  est un extremum local et, le cas échéant, si c'est un minimum ou maximum local.

#### EXERCICE 4.4

Étude de  $f(x) = e^x + \ln(1+x)$  en 0.

#### 4.2.2 Étude des asymptotes

DÉFINITION 4.5 (DL en  $+\infty$ )

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $+\infty$ . On dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $+\infty$  si la fonction  $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $0^+$ .

REMARQUE 4.6

On a alors  $f(x) = a_0 + a_1 \frac{1}{x} + \dots + a_n \frac{1}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ , en  $+\infty$ .

MÉTHODE 4.7

On dit que la droite affine  $x \mapsto ax + b$  est asymptote oblique à  $f$  en  $+\infty$  si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Si la fonction  $x \mapsto f(x) - (ax + b)$  admet un développement limité en  $+\infty$ , on peut déterminer la position relative de la courbe représentative de  $f$  et de son asymptote.

EXERCICE 4.8

Étude en  $+\infty$  de  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ .

### 4.3 Série harmonique et formule de Stirling

REMARQUE 4.9 (Développement asymptotique)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. Si on peut écrire  $u_n = \sum_{k=1}^N a_k v_{k,n} + o(v_{N,n})$ , où les  $(v_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$  sont des suites de référence telles que  $v_{k+1,n} = o(v_{k,n})$  et les  $a_k$  des constantes, on dit qu'on a écrit un développement asymptotique de  $(u_n)$  à  $N$  termes.

Chaque terme de la somme affine la connaissance du comportement asymptotique de  $(u_n)$ .

THÉORÈME 4.10 (Série harmonique)

Il existe une constante  $\gamma^1$  telle que  $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

THÉORÈME 4.11 (Formule de Stirling)

On a l'équivalent suivant :  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

---

1. Constante d'Euler-Mascheroni,  $\gamma \cong 0,577$