DS 8 de mathématiques

Durée : 4h.

- Les calculatrices et autres technologies sont interdites.
- Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et à la rigueur du raisonnement. La copie doit être lisible, les pages numérotées, les calculs suffisamment détaillés, les résultats mis en valeur...
- Les trois problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.
- Si vous repérez une possible erreur d'énoncé, vous êtes invité(e) à venir le signaler.

1 Exercice – Deux questions d'asymptotique

1. (a) Déterminer un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^{n} k \ln k$, à la précision $o(n^2)$.

   (b) En déduire un équivalent de $\sqrt[n^2]{1 \times 2^2 \times \cdots \times n^n}$, quand $n \to +\infty$.

2. (a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, il existe un unique réel $x > 0$ tel que $x^\lambda = e^{1/x}$.

   On note x_λ ce réel.

   (b) Montrer que $x_\lambda \to 1$, quand $\lambda \to +\infty$.

   (c) Déterminer un développement asymptotique à trois termes de x_λ, quand $\lambda \to +\infty$.

2 Exercice – Un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} k^p Q^k$

1. Soit p un réel. On cherche un équivalent de $I_p(x) = \int_1^x t^p e^t dt$, quand $x \to +\infty$.

   (a) Dans cette question, $p \geq 0$. Montrer que $I_p(x) = O(x^p e^x)$, quand $x \to +\infty$.

   (b) Dans cette question, $p \leq 0$. En découpant l'intégrale en deux, montrer que

   $$\forall x \geq 2, I_p(x) \leq e^{x/2} + \left(\frac{x}{2}\right)^p e^x.$$

   En déduire qu'on a encore $I_p(x) = O(x^p e^x)$, quand $x \to +\infty$.

   (c) Donner une relation simple entre $I_p(x)$, $I_{p-1}(x)$ et $x^p e^x$, pour tout $x \geq 1$.

   (d) En déduire que $I_p(x) \sim x^p e^x$, quand $x \to +\infty$.

2. Soit $Q > 1$. En déduire un équivalent de $I_{p,Q}(x) = \displaystyle\int_1^x t^p Q^t dt$, quand $x \to +\infty$.

3. On cherche maintenant un équivalent de $S_{n,p,Q} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p Q^k$, quand $n \to +\infty$.

   (a) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $S_{n,p,Q} = O(n^p Q^n)$, quand $n \to +\infty$.

   (b) En remarquant que $Q^k = \dfrac{Q^{k+1} - Q^k}{Q-1}$, pour tout $k \geq 1$, montrer que

   $$\forall n \geq 1, S_{n,p,Q} = \frac{1}{Q-1}\left(n^p Q^{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\big(k^p - (k-1)^p\big)Q^k\right).$$

   (c) Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tout $k \geq 1$, $|k^p - (k-1)^p| \leq A k^{p-1}$.

   (d) En déduire un équivalent de $S_{n,p,Q}$, quand $n \to +\infty$.

3 Problème – Sur la convergence au sens d'Abel

Dans tout le problème, on désigne par $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ une série de nombres réels ou complexes, indexée par $\mathbb{N}^*$. On note $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de la série, en cas de convergence.

Ce problème s'intéresse à la sommation de séries au sens d'Abel et est composé de quatre parties.

- Dans la première partie, on montre le lemme de Toeplitz, un résultat général sur les suites et séries, qui sera utilisé dans la suite.
- Dans la deuxième partie, on montre le théorème d'Abel sur les séries entières et on l'utilise pour déterminer la somme des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$.
- Dans la troisième partie, on définit les notions de convergence au sens de Cesàro et au sens d'Abel et on en étudie certaines propriétés.
- Dans la quatrième et dernière partie, on calcule la somme au sens d'Abel de certaines séries divergentes.

3.1 Lemme de Toeplitz

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $p_n : [0, 1[\to \mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{t\to 1} p_n(t) = 0$;

- Pour tout $t \in [0,1[$, la série $\sum_{n\geq 1} p_n(t)$ converge et $\lim_{t\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) = 1$.

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite convergente de limite ℓ.

1. Montrer que, pour tout $t \in [0,1[$, la série $\sum_{n\geq 1} p_n(t) a_n$ converge absolument.

2. Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $t \in [0,1[$. Montrer que
$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)a_n - \ell\right| \leq \max_{n\in [\![1,N]\!]} \big(p_n(t)\big) \sum_{n=1}^{N} |a_n - \ell| + \sum_{n=N+1}^{\infty} p_n(t)|a_n - \ell| + \left|1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)\right| |\ell|.$$

3. En déduire soigneusement que $\lim_{t\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)a_n = \ell$.

3.2 Théorème d'Abel

On suppose que $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

On cherche à montrer le théorème d'Abel, qui affirme que $\lim_{t\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

4. (a) Montrer que, pour tout $t \in [0,1[$, $\sum_{n\geq 1} u_n t^n$ converge absolument.

   (b) Soit $t \in [0,1[$, soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{n=1}^{N} u_n t^n = \sum_{n=1}^{N-1} (t^n - t^{n+1})U_n + U_N t^N$.

   (c) Conclure, en utilisant le lemme de Toeplitz.

5. **Une application.** Soit $\theta \in]0,\pi[$. On cherche à déterminer la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$, dont la convergence a été montrée en DM. Pour tout $N \geq 1$, on définit f_N sur $[0,1[$ par $f_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{in\theta}t^n}{n}$ et $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}t^n}{n}$.

   (a) Montrer que, pour tous $N \geq 1$ et $t \in [0,1[$, on a
   $$f_N(t) = -\int_0^t \frac{1 - (e^{i\theta}u)^N}{u - e^{-i\theta}} du.$$

   (b) Montrer que, pour tout $t \in [0,1[$,
   $$f(t) = -\int_0^t \frac{1}{u - e^{-i\theta}} du = -\ln|t - e^{-i\theta}| + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t - \cos\theta}{\sin\theta}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

   (c) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$.
   On simplifiera au maximum les expressions trouvées.

3.3 Convergence au sens de Cesàro et au sens d'Abel

On dit que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge au sens de Cesàro si la suite de terme général $\dfrac{U_1+\cdots+U_n}{n}$ converge. On note alors $\overset{\mathcal{C}}{\sum_{n\geq 1}} u_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{U_1+\cdots+U_n}{n}$.

On dit que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge au sens d'Abel si $\sum_{n\geq 1} u_n t^n$ converge pour tout $t \in [0,1[$ et que $t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n t^n$ a une limite finie quand $t \to 1$. On note alors $\overset{\mathcal{A}}{\sum_{n\geq 1}} u_n = \lim_{t\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n t^n$.

Par le cours et la partie précédente, on remarque que si $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge au sens classique, alors elle converge au sens de Cesàro et au sens d'Abel. De plus, on a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \overset{\mathcal{C}}{\sum_{n\geq 1}} u_n = \overset{\mathcal{A}}{\sum_{n\geq 1}} u_n.$$

6. Montrer que $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}$ converge au sens de Cesàro et déterminer $\overset{\mathcal{C}}{\sum_{n\geq 1}}(-1)^{n-1}$.

7. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est à termes positifs et converge au sens de Cesàro, alors elle converge au sens classique.

8. Montrer que si $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge au sens de Cesàro, alors $U_n = o(n)$.

9. Donner un contre-exemple à la réciproque de la question précédente.

10. **Théorème de Frobenius.** On cherche maintenant à démontrer que la convergence au sens de Cesàro implique la convergence au sens d'Abel.
Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ une série convergente au sens de Cesàro.

    (a) Montrer que, pour tout $t \in [0,1[$, les séries $\sum_{n\geq 1} u_n t^n$, $\sum_{n\geq 1} U_n t^n$ et $\sum_{n\geq 1}(U_1+\cdots+U_n)t^n$ sont convergentes.

    (b) Montrer que, pour tout $t \in [0,1[$, on a l'identité :

    $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{U_1+\cdots+U_n}{n}\right)(1-t)^2 n t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n t^n.$$

    (c) En déduire que $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente au sens d'Abel et que $\overset{\mathcal{A}}{\sum_{n\geq 1}} u_n = \overset{\mathcal{C}}{\sum_{n\geq 1}} u_n$.

3.4 Calculs de sommes de séries divergentes

11. (a) Pour tout $N \geq 1$, on note f_N la fonction définie sur $[0,1[$ par $f_N(t) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} t^n$.

    Montrer que pour tout $t \in]0,1[$, on a $f_N(t) = 1 - (-t)^N - \dfrac{1-(-t)^N}{1+t}$.

    (b) Soit $k \geq 1$. Montrer que, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\lim_{N \to +\infty} f_N^{(k)}(t) = k! \frac{(-1)^{k+1}}{(1+t)^{k+1}}.$$

    (c) En déduire que, pour tout $k \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \binom{n}{k}$ est convergente au sens d'Abel et que $\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{A}} (-1)^{n-1} \binom{n}{k} = \dfrac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}$.

12. Pour tout réel s, on note $\eta(s) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{A}} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^s}$, quand cette somme est bien définie.

    (a) Justifier que $\eta(s)$ est bien défini pour $s > 0$.

    (b) Montrer que $\eta(s)$ est bien défini pour tout entier s négatif.

    (c) Déterminer les valeurs de $\eta(0)$, $\eta(-1)$ et $\eta(-2)$.

13. Pour tout $s > 1$, on note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^s}$.

    (a) Montrer que, pour tout $s > 1$, $\zeta(s) = \dfrac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}}$.

    (b) On étend la définition de $\zeta(s)$ par cette formule, à tous les réels $s \neq 1$ pour lesquels $\eta(s)$ est défini. Déterminer les valeurs de $\zeta(0)$, $\zeta(-1)$ et $\zeta(-2)$.